Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie

$$y' + p(x)y = q(x).$$

I RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE JEDNORODNE PIERWSZEGO RZĘDU

Równania różniczkowe liniowe JEDNORODNE pierwszego rzędu, są to równania mające następującą postać

$$y' + p(x)y = 0.$$

Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych i można je rozwiązywać w taki właśnie sposób.
Jeśli p jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale, to rozwiązanie równania różniczkowego liniowego jednorodnego $y' + p(x)y = 0$ jest określone wzorem

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R}.$$

ZADANIE 3 Rozwiązać następujące równania różniczkowe
a) $y' - y = 0$ b) $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Rozwiązanie
a) $y' - y = 0$
$p(x) = -1$
$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int -1dx} = Ce^{x}, C \in \mathbb{R}.$

b) $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$
$p(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx} = Ce^{-\arcsin x}, C \in \mathbb{R}.$

ZADANIE 4 Znaleźć krzywą całkową równania $y' - \frac{y}{x} = 0$ przechodzącą przez punkt $(1, 2)$.

Rozwiązanie
Zauważamy, ze równanie to jest równaniem liniowym jednorodnym, gdzie $p(x) = -\frac{1}{x}$. Zatem

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int -\frac{1}{x}dx} = Ce^{\ln x} = Cx, C \in \mathbb{R}.$$

Korzystając z warunku początkowego, do naszego rozwiązania $y(x) = Cx$ podstawmy $x = 1,\ y = 2$ i wyliczamy stałą $C = 2$.
Szukana krzywa całkowa będzie miała następującą postać

$$y(x) = 2x.$$

II RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE liniowe niejednorodne I rzędu - metoda uzmienniania stałej

W przypadku, gdy w równaniu różniczkowym $y'+p(x)y = q(x)$ funkcja $q(x) \neq 0$, równanie takie nazywamy niejednorodnym i rozwiązujemy według następującego schematu:

1. Przyjmujemy $q(x) = 0$ i wyznaczamy rozwiązanie ogólne równanie jednorodnego (RORJ)
2. Wykorzystując metodę uzmienniania stałej lub metodę przewidywań wyznaczamy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN) i wyznaczamy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego RORN=RORJ+RSRN.

ZADANIE 1 Rozwiązać następujące równania różniczkowe

a) $y' + \frac{y}{x} = 2$ b) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ c) $xy' + 3y = x^2$

Rozwiązanie

a) $y' + \frac{y}{x} = 2$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne $y' + \frac{y}{x} = 0$.

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{-\ln|x|} = Ce^{\ln|\frac{1}{x}|=\frac{C}{x}}, C \in \mathbb{R}.$$

Dalej, wyznaczamy całkę szczególną równania niejednorodnego, wykorzystując wyznaczone rozwiązanie równania jednorodnego $y(x) = \frac{C}{x}$. Stałą C w tym równaniu zastępujemy funkcją $C(x)$ a następnie różniczkujemy je stronami.

$$y(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$y'(x) = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)\cdot 1}{x^2}$$

Tak otrzymane wyrażenia podstawiamy do naszego równania niejednorodnego $y' + \frac{y}{x} = 2$, otrzymując

$$\frac{C'(x)\cdot x - C(x)\cdot 1}{x^2} + \frac{\frac{C(x)}{x}}{x} = 2$$

$$\frac{C'(x)\cdot x}{x^2} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2$$

$$\frac{C'(x)}{x} = 2 \quad / \cdot x$$

$$C'(x) = 2x$$

$$C(x) = \int 2x dx$$

$$C(x) = x^2 + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając teraz otrzymaną funkcję C do uzmiennionego rozwiązania równania jednorodnego $y(x) = \frac{C(x)}{x}$, otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

$$y(x) = \frac{x^2 + D}{x} = \frac{D}{x} + x, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

b) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

Wyznaczmy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \cos x dx} = Ce^{-\sin x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dalej, przechodzimy do metody uzmienniania stałej C.

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x}$$

$$y'(x) = C'(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}(-\cos x) = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x.$$

Powyższe wyrażenia podstawiamy do naszego równania niejednorodnego $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, otrzymując

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \frac{1}{2}\sin 2x \quad / \cdot e^{\sin x}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2} e^{\sin x} \sin 2x$$

$$/ \sin 2x = 2 \sin x \cos x/$$

$$C'(x) = \frac{1}{2} e^{\sin x} \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$C(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx$$

$$/t = \sin x, dt = \cos x dx/$$

$$C(x) = \int t e^t dt$$

$$/f = t \quad g' = e^t/$$

$$/f' = 1 \quad g = e^t/$$

$$C(x) = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + D, \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$/t = \sin x$$

$$C(x) = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczoną funkcję C podstawiamy do uzmiennionego rozwiązania

$$y(x) = \left(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + D\right) e^{-\sin x} = \sin x - 1 + De^{-\sin x}, \qquad D \in \mathbb{R},$$

które staj się rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego.

c) $xy' + 3yx = x^2$
Podzielmy równanie przez x, zakładając, że $x \neq 0$. Otrzymujemy następujące równanie $y' + \frac{3}{x}y = x$.
RORJ: $y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \frac{3}{x}dx} = Ce^{-3\ln|x|} = \frac{C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}$.
Teraz uzmienniamy stałą C

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^3}$$

$$y'(x) = \frac{C'(x) \cdot x^3 - C(x) \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$y'(x) = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}.$$

Powyższe wyrażenia podstawiamy do naszego równania niejednorodnego $xy' + 3yx = x^2$, otrzymując

$$x\left(\frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}\right) + 3x\frac{C(x)}{x^3} = x^2$$

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{3C(x)}{x^3} + \frac{3C(x)}{x^2} = x^2$$

$$\frac{C'(x)}{x^2} = x^2 \quad / \cdot x^2$$

$$C'(x) = x^4$$

$$C(x) = \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczoną funkcję C podstawiamy do uzmiennionego rozwiązania

$$y(x) = \frac{\frac{1}{5}x^5 + D}{x^3} = \frac{1}{5}x^2 + Dx^3 \qquad D \in \mathbb{R},$$

które staje się rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego.

III RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE liniowe niejednorodne I rzędu - metoda przewidywań

Metodę przewidywań możemy zastosować zamiast metody uzmienniania stałej, jeśli równanie liniowe jest równaniem o stałych współczynnikach ($p(x) \in \mathbb{R}$) oraz prawa strona równania posiada właściwą postać ($q(x)$ jest wielomianem, $e^{\alpha x}$, $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), sumą lub iloczynem takich funkcji).
Rozwiązanie szczególne przewidujemy w następujący sposób:
1. Jeśli $q(x)$ jest wielomianem stopnia n, to rozwiązanie szczególne przewidujemy jako pełny tego samego stopnia (przewidujemy wszystkie współczynniki, gdy po prawej stronie znajduje się np.$w(x) = x^3$, przewidujemy wielomian ze wszystkimi współczynnikami: $ax^3 + bx^2 + cx + d$, współczynniki te należy wyliczyć).
2. Jeśli $q(x) = \gamma \sin \alpha x + \delta \cos \alpha x$ ($\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$) lub pojawia się tylko jedna z funkcji trygonometrycznych, wtedy rozwiązanie szczególne przewidujemy jako $y(x) = a \sin \alpha x + b \cos \alpha x$, gdzie stałe a i b należy wyliczyć.
3. Jeśli $q(x) = \alpha e^{\beta}(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, to rozwiązanie szczególne przewidujemy jako $y(x) = ae^{\beta}$, gdzie stałą a należy wyliczyć.
W przypadku przewidywania funkcji wykładniczej, może okazać się, że nasze przewidywanie ma taką postać jak wyznaczone wcześniej RORJ. Takie przewidywanie powoduje więc powstanie tożsamości, uniemożliwiając wyliczenie stałej a. Dzieje się tak w przypadku, gdy $p(x) = -\beta$. Wówczas takie przewidywanie należy poprawić, domnażając je przez x, czyli przewidywać $y(x) = axe^{\beta}$.
4. Jeśli $q(x)$ jest iloczynem lub suma wyżej rozważanych funkcji, to przewidujemy w analogiczny sposób taki iloczyn lub sumę.

ZADANIE 2 Rozwiązać następujące równania różniczkowe
a) $y' - y = 2e^x + x^2 + x$ b) $y' + y = 2x \sin x + \cos 2x - \sin 2x$

Rozwiązanie
a) $y' - y = 2e^x + x^2 + x$
Wyznaczmy najpierw RORJ: $y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \frac{-}{1} dx} = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$.
Teraz wykorzystując metodę przewidywań, wyznaczymy rozwiązania szczególne. Ponieważ funkcja $q(x)$ jest sumą funkcji wykładniczej i wielomianu, więc dzielimy równanie niejednorodne na dwa równania, dla których przewidujemy dwa oddzielnie rozwiązania szczególne.
1) Dla równania $y' - y = 2e^x$ przewidujemy $y_1 = axe^x$ (zauważamy, że należy poprawić przewidywanie, pierwsze przewidywanie postaci $y = ae^x$ jest naszym RORJ), skąd $y_1' = ae^x + axe^x$. Po podstawieniu powyższych wyrażeń, otrzymujemy
$ae^x + axe^x - axe^x = 2e^x$
$ae^x = 2e^x$
$a = 2$
RSRN$_1$: $y_1 = 2xe^x$
2) Dla równania $y' - y = x^2 + x$ przewidujemy $y_2 = bx^2 + cx + d$, skąd $y_2' = 2bx + c$. Po podstawieniu powyższych wyrażeń, otrzymujemy
$2bx + c - (bx^2 + cx + d) = x^2 + x$
$2bx + c - bx^2 - cx - d = x^2 + x$
$-bx^2 + (2b - c)x + c - d = x^2 + x$

$$\begin{cases} -b = 2 \\ 2b - c = 1 \\ c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -5 \\ d = -5 \end{cases}$$

RSRN$_2$: $y_2 = -2x^2 - 5x - 5$.
Zatem skoro RORN=RORJ+RSRN$_1$+RSRN$_2$,to nasze rozwiązanie możemy ostatecznie zapisać jako

$$y(x) = Ce^x + 2xe^x - 2x^2 - 5x - 5, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) $y' + y = 2x \sin x + \cos 2x - \sin 2x$
Wyznaczmy najpierw RORJ: $y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \frac{1}{d} x} = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$.

Teraz wykorzystując metodę przewidywań, wyznaczymy rozwiązania szczególne. Ponieważ funkcja $q(x)$ jest sumą kilku różnych funkcji trygonometrycznych, więc dzielimy równanie niejednorodne na dwa równania, dla których przewidujemy dwa oddzielnie rozwiązania szczególne. Równań będzie dwa, ponieważ funkcje $\cos 2x$ i $\sin 2x$ mają taki sam argument i mogą być objęte wspólnym przewidywaniem.
1) Dla równania $y' + y = 2x\sin x$ przewidujemy $y_1 = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x$, skąd
$y_1' = a\sin x + (ax+b)\cos x + c\cos x - (cx+d)\sin x = (a-d-cx)\sin x + (ax+b+c)\cos x$. Po podstawieniu powyższych wyrażeń, otrzymujemy

$$(a-d-cx)\sin x + (ax+b+c)\cos x + (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x = 2x\sin x$$

$$(a-d-cx+ax+b)\sin x + (ax+b+c+cx+d)\cos x = 2x\sin x$$

$$((a-c)x+a+b-d)\sin x + ((a+c)x+b+c+d)\cos x = 2x\sin x + 0\cos x$$

.

$$\begin{cases}(a-c)x+a+b-d=2x\\(a+c)x+b+c+d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-c=2\\a+b-d=0\\a+c=0\\b+c+d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\\c=-1\\d=1\end{cases}$$

RSRN$_1$: $y_1 = x\sin x + (-x+1)\cos x$
2) Dla równania $y' + y = \cos 2x - \sin 2x$ przewidujemy $y_2 = m\cos 2x + n\sin 2x$, skąd
$y_2' = -2m\sin 2x + 2n\cos 2x$.
Po podstawieniu powyższych wyrażeń, otrzymujemy

$$-2m\sin 2x + 2n\cos 2x + m\cos 2x + n\sin 2x = \cos 2x - \sin 2x$$

$$(n-2m)\sin 2x + (2n+m)\cos 2x = \cos 2x - \sin 2x$$

$$\begin{cases}n-2m=1\\2n+m=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=-\frac{3}{5}\\n=-\frac{1}{5}\end{cases}$$

RSRN$_2$: $y_2 = -\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x$.
Zatem skoro RORN=RORJ+RSRN$_1$+RSRN$_2$,to nasze rozwiązanie możemy ostatecznie zapisać jako

$$y(x) = Ce^{-x} + x\sin x + (-x+1)\cos x - \frac{3}{5}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$