EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

TW. Założmy, że $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$

Oznaczamy:

$$W_1(A) = f''_{xx}(A), \quad W_2(A) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix}$$

TEZA

1) Jeżeli $W_1(A) > 0$, $W_2(A) > 0$ to f-cja f ma w punkcie A MINIMUM LOKALNE
2) Jeżeli $W_1(A) < 0$, $W_2(A) > 0$ to f-cja f ma w punkcie A MAKSIMUM LOKALNE
3) Jeżeli $W_2(A) < 0$ to w p. A NIE MA EKSTREMUM

UWAGA Zauważmy, że aby ekstremum lokalne istniało musi być $W_2 > 0$. To, czy jest to minimum czy maksimum zależy od znaku W_1.

PRZYKŁAD

Zbadać ekstrema lokalne funkcji: $f(x,y) = \underbrace{(x+y)^2}_{x^2+2xy+y^2} - (x+5y+xy)$

Uprośćmy wzór funkcji (łatwiej będzie policzyć pochodne):

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - x - 5y - xy = x^2 + xy + y^2 - x - 5y$$

1. Dziedzina funkcji: $D_f = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \text{ i } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
2. Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f pierwszego i drugiego rzędu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = (x^2 + xy + y^2 - x + 5y)'_x = 2x + y - 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = (2x + y - 1)'_x = 2$$

stałe

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = (x^2 + xy + y^2 - x + 5y)'_y = x + 2y + 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = (x + 2y + 5)'_y = 2$$

stałe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = (2x + y - 1)'_y = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = (x + 2y + 5)'_x = 1$$

z tw. Schwarza o pochodnych mieszanych: $f''_{xy} = f''_{yx}$ (jeżeli drugie pochodne mieszane istnieją i są ciągłe to są sobie równe).

3. Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$

Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są równe 0 albo w punktach w których choć jedna z nich nie istnieje.

Mamy:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2\underbrace{(1-2x)}_{y} + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2 - 4x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zatem funkcja f może mieć ekstrema tylko w punkcie $A = (-1, 3)$

4. Liczymy wartość wyznacznika:

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

dla dow. punktu

w punkcie $A=(-1,3)$, czyli podstawiamy w wyznaczonych pochodnych $x=-1$, $y=3$ (jeżeli x i y występują)

Mamy $f''_{xx}=2$, $f''_{yy}=2$, $f''_{xy}=f''_{yx}=1$ ← nie występują x i y stąd nie musimy podstawiać już punktu $A=(-1,3)$ (są to wartości pochodnych także w tym punkcie, bo nie zależą od zmiennych x,y).

Zatem:

$$W_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 > 0$$

W_1

⇒ funkcja f ma w punkcie $A=(-1,3)$ ekstremum lokalne

Ponieważ $W_1(A) = f''_{xx}(-1,3) = 2 > 0$, więc jest to MINIMUM.

Wyznaczymy ile ono wynosi, czyli policzymy wartość f-cji w tym punkcie:

$f(-1,3) = (-1+3)^2 - (-1+5\cdot 3 + (-1)\cdot 3) = 4-11 = -7$

ODP.: Funkcja f ma w punkcie $A=(-1,3)$ minimum lokalne i wynosi ono -7.

PRZYKŁAD Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$$

1. $D_f = \mathbb{R}^2$
2. Obliczamy pochodne cząstkowe:

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = (x^3 + 3xy^2 - 6xy)'_x = 3x^2 + 3y^2 - 6y$ (stałe)

$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = (x^3 + 3xy^2 - 6xy)'_y = 6xy - 6x$ (stałe)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = (6xy - 6x)'_x = 6y - 6$ (stałe)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = (3x^2 + 3y^2 - 6y)'_x = 6x$ (stałe)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = (6xy - 6x)'_y = 6x$ (stałe)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = (3x^2 + 3y^2 - 6y)'_y = 6y - 6$ (stałe)

3. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \ /:3 \\ 6xy - 6x = 0 \ /:6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ lub } y=1$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1 \\ x^2+1-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y(y-2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ lub } x=-1$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Zatem funkcja może mieć ekstrema lokalne w punktach:

$A=(0,0)$, $B=(0,2)$, $C=(1,1)$, $D=(-1,1)$.

4. Oznaczamy:

$$W_1(x,y) = f''_{xx}(x,y) = 6x$$

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y-6 \\ 6y-6 & 6x \end{vmatrix}$$

Zbadamy wartości W_1, W_2 dla każdego z punktów A, B, C, D osobno:

- dla $A = (0,0)$

Pochodne drugiego rzędu zależą już od x i y więc wstawiamy $x=0$, $y=0$:

$$W_2(0,0) = \begin{vmatrix} 6\cdot 0 & 6\cdot 0-6 \\ 6\cdot 0-6 & 6\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0-36 < 0$$

Ponieważ $W_2(A)<0$ funkcja f nie ma w p. A ekstremum.

- dla $B=(0,2)$

$$W_2(0,2) = \begin{vmatrix} 6\cdot 0 & 6\cdot 2-6 \\ 6\cdot 2-6 & 6\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0-36<0$$

Funkcja f nie ma w p. B ekstremum.

- dla $C=(1,1)$

$$W_2(1,1) = \begin{vmatrix} 6\cdot 1 & 6\cdot 1-6 \\ 6\cdot 1-6 & 6\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} W_1 \\ \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \end{array} = 36>0 \Rightarrow$$ funkcja f ma w p. C ekstremum lokalne

Ponieważ $W_1(C) = 6>0$, jest to MINIMUM i jego wartość to:

$$f(1,1) = 1^3+3\cdot 1\cdot 1-6 = 4-6=-2$$

- dla $D=(-1,1)$

$$W_2(-1,1) = \begin{vmatrix} 6\cdot(-1) & 6\cdot 1-6 \\ 6\cdot 1-6 & 6\cdot(-1) \end{vmatrix} = \begin{array}{c} W_1 \\ \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \end{array} = 36>0 \Rightarrow$$ funkcja f ma w p. D ekstremum lokalne

Ponieważ $W_1(D) = -6<0$, jest to MAKSIMUM i wynosi:

$$f(-1,1) = (-1)^3+3\cdot(-1)\cdot 1^2-6\cdot(-1)\cdot 1 = -1-3+6=2$$

ODP. Funkcja f ma ekstrema lok. w punktach: $(1,1)$ – minimum i wynosi -2, w $(-1,1)$ maksimum, $f(-1,1)=2$.

PRZYKŁAD Zbadać ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

1. $D_f = \mathbb{R}^2$
2. Wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \left(e^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_x = e^{-(x^2+y^2+2x)}\cdot\left(-(x^2+y^2+2x)\right)'_x = -(2x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

pochodna iloczynu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \left(-(2x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_x = (-(2x+2))'_x\cdot e^{-(x^2+y^2+2x)} + (-2x-2)\left(e^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_x =$$
$$= -2e^{-(x^2+y^2+2x)} + (-2x-2)(-2x-2)e^{-(x^2+y^2+2x)} = (4x^2+8x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \left(e^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_y = e^{-(x^2+y^2+2x)}\cdot\left(-(x^2+y^2+2x)\right)'_y = -2ye^{-(x^2+y^2+2x)}$$

pochodna iloczynu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \left(-2ye^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_y = -2e^{-(x^2+y^2+2x)} - 2y\cdot\left(-2ye^{-(x^2+y^2+2x)}\right) = (4y^2-2)e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \left(-2y e^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_x = -2y \cdot e^{-(x^2+y^2+2x)} \cdot (-(2x+2)) = 4y(x+1)e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \left(-(2x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)}\right)'_y = -(2x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)} \cdot (-2y) = 4y(x+1)e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

3. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -(2x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)} = 0 \quad /: e^{-(x^2+y^2+2x)} \neq 0 \\ -2y e^{-(x^2+y^2+2x)} = 0 \quad /: e^{-(x^2+y^2+2x)} \neq 0 \end{cases}$$

bo $e^t \neq 0$ dla dow. $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -2x-2=0 \Rightarrow x=-1 \\ -2y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Jedynym punktem, w którym funkcja f może mieć ekstrema jest $A=(-1,0)$.

4. Oznaczmy:

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} (4x^2+8x+2)e^{-(x^2+y^2+2x)} & 4y(x+1)e^{-(x^2+y^2+2x)} \\ 4y(x+1)e^{-(x^2+y^2+2x)} & (4y^2-2)e^{-(x^2+y^2+2x)} \end{vmatrix}$$

Stąd dla $A=(-1,0)$ mamy:

$$W_2(-1,0) = \begin{vmatrix} (4\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+2)e^{-(1+0-2)} & 0 \\ 0 & -2e^{-(1+0-2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{W_1}{-2e} & 0 \\ 0 & -2e \end{vmatrix} = 4e^2 > 0$$

Zatem f-cja f ma ekstremum lokalne w p. $A=(-1,0)$.

Ponieważ $W_1(-1,0) = \underset{<0\ >0}{-2e} < 0$, jest to minimum i wynosi:

$$f(-1,0) = e^{-(1+0-2)} = e$$

ODP. Funkcja f ma w punkcie $A=(-1,0)$ maksimum lokalne które wynosi e.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

A) $f(x,y) = 3x+6y-x^2-xy-y^2$
B) $f(x,y) = x^3+3xy^2-51x-24y$
C) $f(x,y) = 6xy-x^3-y^3$
D) $f(x,y) = x^2-xy+y^2+9x-6y+20$
E) $f(x,y) = 3(x-1)^2+4(y+2)^2$

F*) $f(x,y) = (2x+y^2)e^x$
G*) $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$