Całka podwójna po prostokącie

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie domkniętym P:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Całkę z funkcji $f(x,y)$ po prostokącie P oznaczamy symbolem:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$$

CAŁKI ITEROWANE

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie $P = \{a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$ i niech przy każdym stałym x istnieje całka

$$\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Jest ona funkcją zmiennej x określoną w przedziale $a \leq x \leq b$. Jeżeli funkcja ta jest całkowalna na $[a,b]$, to całkę

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

nazywamy <u>całką iterowaną</u> funkcji $f(x,y)$.

Analogicznie określamy całkę iterowaną $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$.

ZAMIANA CAŁKI PODWÓJNEJ NA CAŁKĘ ITEROWANĄ

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w prostokącie P, to obie całki iterowane istnieją i są równe całce podwójnej.

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx,$$

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

$\boxed{\text{Zadanie 1}}$ Obliczyć $\iint\limits_P (1-xy^2)\,dx\,dy$, $P=[-2,3]\times[0,1]$

x y

$$\iint\limits_P (1-xy^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{3}\left[\int_0^1 (1-xy^2)\,dy\right]dx = \int_{-2}^{3}\left\{\left[y - x\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1}\right\}dx =$$

$$\left\{\int(1-xy^2)\,dy = \int 1\,dy - \underset{\text{stała}}{x}\int y^2\,dy = y - \frac{xy^3}{3} + C\right\}$$

$$= \int_{-2}^{3}\left[1 - x\cdot\frac{1^3}{3} - \left(0 - x\cdot\frac{0^3}{3}\right)\right]dx = \int_{-2}^{3}\left[1-\frac{x}{3}\right]dx = \left[x - \frac{x^2}{6}\right]_{x=-2}^{x=3} =$$

$$= 3 - \frac{9}{6} - \left(-2-\frac{4}{6}\right) = \underline{\underline{4\tfrac{1}{6}}}\,.$$

Możemy zamienić kolejność całkowania i później całkę policzyć w następujący sposób:

$$\iint\limits_P (1-xy^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_{-2}^{3}(1-xy^2)\,dx\right]dy = \int_0^1\left\{\left[x - y^2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{x=3}\right\}dy =$$

$$\left\{\int(1-xy^2)\,dx = \int 1\,dx - \underset{\text{stała}}{y^2}\int x\,dx = x - \frac{x^2y^2}{2} + C\right\}$$

$$= \int_0^1\left[3 - y^2\cdot\frac{9}{2} - \left(-2-y^2\cdot\frac{4}{2}\right)\right]dy = \int_0^1\left[5-\frac{5}{2}y^2\right]dy = \left[5y - \frac{5}{6}y^3\right]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \left[5 - \frac{5}{6} - (0-0)\right] = \underline{\underline{4\tfrac{1}{6}}}\,.$$

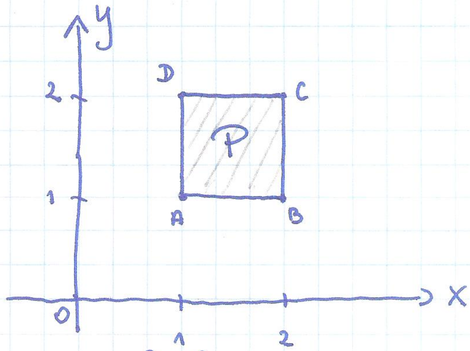
$\boxed{\text{Zadanie 2}}$ Obliczyć $\iint\limits_P x^2\sqrt{y}\,dx\,dy$, $P=[0,1]\times[1,4]$

$$\iint\limits_P x^2\sqrt{y}\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_1^4 x^2\sqrt{y}\,dy\right]dx = \int_0^1\left[x^2\int_1^4\sqrt{y}\,dy\right]dx = \int_0^1\left[x^2\cdot\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_{y=1}^{y=4}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1\left[x^2\left(4^{3/2}-1^{3/2}\right)\right]dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^2\cdot 7\,dx = \frac{14}{3}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{14}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right) = \underline{\underline{\frac{14}{9}}}\,.$$

Zadanie 3 Obliczyć $\iint_P e^{x+y}\,dxdy$, P – kwadrat o wierzchołkach w punktach:
$A=(1,1)$, $B=(2,1)$,
$C=(2,2)$, $D=(1,2)$.



$x \in [1,2]$
$y \in [1,2]$

$$\iint_P e^{x+y}\,dxdy = \int_1^2\left[\int_1^2 e^x\cdot e^y\,dy\right]dx = \int_1^2\left[e^x\cdot(e^y)\Big|_{y=1}^{y=2}\right]dx = \int_1^2 e^x(e^2-e)\,dx$$

$$=(e^2-e)\int_1^2 e^x\,dx = (e^2-e)\,e^x\Big|_{x=1}^{x=2} = (e^2-e)(e^2-e) = \underline{\underline{e^2(e-1)^2}}.$$

zad.
Obliczyć całki podwójne po podanych obszarach: (prostokątach)

A) $\iint_P xy\,dxdy$, $P=[0,1]\times[0,1]$

$$\iint_P xy\,dxdy = \int_0^1\Big[\int_0^1 xy\,dx\Big]dy = \int_0^1\Big[\frac{x^2}{2}y\Big]\Big|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^2}{4}\Big|_0^1 = \frac14$$

B) $\iint_P xy(x-y)\,dxdy$, $P=[0,1]\times[0,2]$

$$\iint_P (x^2y-xy^2)\,dxdy = \int_0^1\Big[\int_0^2 (x^2y-xy^2)\,dy\Big]dx = \int_0^1\Big[\frac{x^2y^2}{2}-\frac{xy^3}{3}\Big]\Big|_0^2dx = \int_0^1\Big(2x^2-\frac83x\Big)dx =$$

$$=\Big[\frac23x^3-\frac43x^2\Big]\Big|_0^1 = \frac23-\frac43=-\frac13$$

C) $\iint_P \sin x\cos y\,dxdy$, $P=[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\iint_P \sin x\cos y\,dxdy = \int_0^\pi\Big[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos y\,dy\Big]dx = \int_0^\pi \sin x\,[\sin y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx = \int_0^\pi \sin x\,(1-(-1))\,dx =$$

$$=2\int_0^\pi \sin x\,dx = 2\cdot(-\cos x)\Big|_0^\pi = 2\cdot(-(-1)+1)=4.$$

D) $\iint_P \cos x\sin y\,dxdy$, $P=[-\frac\pi2,\frac\pi2]\times[0,\pi]$

$$\iint_P \cos x\sin y\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_0^\pi \cos x\sin y\,dy\Big]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-\cos x\cos y]\Big|_0^\pi dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x\cdot(-1-1))\,dx =$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot2=4.$$

E) $\iint_P y^3e^{x^2}\,dxdy$, $P=[0,2]\times[-1,1]$

$$\iint_P y^3e^{x^2}\,dxdy = \int_0^2\Big[\int_{-1}^1 y^3e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^2\Big[\frac{y^4}{4}e^{x^2}\Big]\Big|_{-1}^1dx = \int_0^2\Big(\frac{e^{x^2}}{4}-\frac{e^{x^2}}{4}\Big)dx = \int_0^2 0\,dx = 0$$

F) $\iint_P \frac{x}{y^2}\,dxdy$, $P=[1,2]\times[4,6]$

$$\int_1^2\Big[\int_4^6\frac{x}{y^2}\,dy\Big]dx = \int_1^2\Big[x\cdot\Big(-\frac1y\Big)\Big]\Big|_4^6dx = \int_1^2\Big(\frac{-x}{6}+\frac x4\Big)dx = \frac1{12}\int_1^2 x\,dx = \frac1{24}x^2\Big|_1^2 = \frac1{24}(4-1)=\frac18$$

G) $\iint_P\frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $P=[0,2]\times[0,1]$

$$\int_0^2\Big[\int_0^1\frac{dy}{(x+y+1)^3}\Big]dx = \int_0^2\Big[-\frac{1}{2(x+y+1)^2}\Big]_0^1dx = \int_0^2\Big[-\frac{1}{2(x+2)^2}+\frac{1}{2(x+1)^2}\Big]dx = \Big[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{2(x+1)}\Big]\Big|_0^2 =$$

$$=\frac18-\frac16-\frac14+\frac12=$$

$$=\frac3{24}-\frac4{24}-\frac6{24}+\frac{12}{24}=\frac5{24}$$

$$\int\frac{dy}{(x+y+1)^3} = \left\{\begin{array}{l} t=x+y+1 \\ dt=dy\end{array}\right\} = \int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(x+y+1)^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x+2)^2} = \left\{\begin{array}{l} t=x+2 \\ dt=dx\end{array}\right\} = \int\frac{dt}{t^2} = -\frac1t = -\frac1{x+2}$$