Równania różniczkowe liniowe wyższych rzędów

I Równania różniczkowe liniowe II rzędu o stałych współczynnikach — JEDNORODNE

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Aby rozwiązać takie równanie należy zastosować następujące podstawienie:

$$y = e^{rx}.$$

Takie podstawienie należy dwukrotnie zróżniczkować

$$y' = e^{rx} \cdot (rx)' = re^{rx}$$

$$y'' = re^{rx} \cdot (rx)' = r^2 e^{rx}.$$

Powyższe wyrażenia podstawiamy do równania jednorodnego:

$$r^2 e^{rx} + a \cdot r e^{rx} + b e^{rx} = 0 \quad /: e^{rx}$$

$$r^2 + ar + b = 0. \leftarrow \text{równanie charakterystyczne}$$

Rozwiązaniami powyższego równania mogą być:

1° $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$

2° $r_0 (= r_1 = r_2)$, $\Delta = 0$

3° $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, $\Delta < 0$
$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Wtedy, w zależności od Δ, RORJ przyjmuje jedną z trzech postaci:

I $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

II $y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

III $y = e^{\alpha x}[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x]$

Zadanie 1 Rozwiązać następujące równanie różniczkowe

a) $y'' - 7y' + 12y = 0$

b) $y'' + 6y' + 10y = 0$

c) $y'' + 6y' + 9y = 0$

d) $y'' + y' = 0$

Rozwiązanie:

Stosujemy podstawienie: $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ =>

a) $r^2 e^{rx} - 7re^{rx} + 12e^{rx} = 0 \;/ : e^{rx}$

$r^2 - 7r + 12 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$

$r_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \lor r_2 = \frac{7+1}{2} = 4$

Zatem RORJ: $\underline{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) $r^2 e^{rx} + 6re^{rx} + 10e^{rx} = 0 \;/ : e^{rx}$

$r^2 + 6r + 10 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \pm 2i$

$r_1 = \frac{-6-2i}{2} = -3 - i \lor r_2 = \frac{-6+2i}{2} = -3 + i$

$\underline{\alpha = -3,\ \beta = 1}$

RORJ: $\underline{y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

c) $r^2 + 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r+3)^2 = 0 \Rightarrow r_0 = -3$

RORJ: $\underline{y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $r^2 + r = 0$

$r(r+1) = 0$

$r_1 = 0 \lor r_2 = -1$

RORJ: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x}$

$\underline{y = C_1 + C_2 e^{-x}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

II Równania różniczkowe liniowe II rzędu o stałych współczynnikach – NIEJEDNORODNE – METODA PRZEWIDYWAŃ

Niejednorodne równanie liniowe II rzędu

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

rozwiązujemy wyznaczając najpier RORJ. Następnie należy wyznaczyć rozwiązanie szczególne RSRN. Do wyznaczenia równania niejednorodnego tego rozwiązania najpierw wykorzystamy metodę przewidywań. Aby można było skorzystać z tej metody, prawa strona równania musi mieć odpowiednią postać (wielomian, sinus, cosinus, e^x, ewentualnie suma, różnica, iloczyn takich f-cji). Rozwiązanie szczególne przewidujemy dokładnie tak, jak w przypadku równań liniowych I rzędu, z tą różnicą, że w przypadku równań II rzędu w razie konieczności poprawy przewidywania, będzie trzeba to zrobić nawet dwukrotnie.

Zadanie 2

Rozwiązać następujące równanie różniczkowe

a) $y'' - y = 2\sin x$

b) $y'' - y' + 4y = 4xe^{2x}$

c) $y'' + y = xe^x + \sin x$

Rozwiązanie:

$r^2 - 1 = 0$

$r_1 = -1 \lor r_2 = 1$ $\Rightarrow$ RORJ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ponieważ po prawej stronie równania znajduje się f-cja trygonometryczna, przewidujemy:

$$\boxed{y = A\sin x + B\cos x}$$

$$y' = A\cos x + B(-\sin x) = A\cos x - B\sin x$$

$$y'' = A(-\sin x) - B\cos x = -A\sin x - B\cos x$$

$$\underbrace{-A\sin x - B\cos x}_{y''} - \underbrace{(A\sin x + B\cos x)}_{y} = 2\sin x$$

$$-2A\sin x - 2B\cos x = 2\sin x$$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{RSRN: } y = -1\cdot\sin x$$

RORN = RORJ + RSRN

RORN: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) $y'' - 4y' + 4y = 4x + e^{2x}$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_0 = 2$$

RORJ: $y = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ponieważ po prawej stronie równania znajduje się suma wielomianu i f-cji wykładniczej, przewidujemy dwa rozwiązania szczególne.

RN₁: $y'' - 4y' + 4y = 4x$

$y_1 = ax + b$

$y_1' = a$

$y_1'' = 0$

$0 - 4a + 4(ax+b) = 4x$

$4ax + 4b - 4a = 4x$

$$\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

RSRN₁: $y = x + 1$

RN₂: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

UWAGA!

Jeżeli zrobimy przewidywanie $y = Ae^{2x}$ trzeba będzie je poprawić, jednak domnażając jeden raz przez x otrzymamy $y = Axe^{2x}$ też już zawiera RORJ. Domnażamy przez x^2!

$$y_2 = Ax^2e^{2x}$$

$$y_2' = A\cdot 2x\cdot e^{2x} + Ax^2\cdot e^{2x}\cdot 2 = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} = 2A(x+x^2)e^{2x}$$

$$y_2'' = 2A\left[(1+2x)e^{2x} + (x+x^2)e^{2x}\cdot 2\right] = 2A(1+4x+2x^2)e^{2x}$$

$$\underbrace{2A(1+4x+2x^2)e^{2x}}_{y''} - 4\cdot\underbrace{2A(x+x^2)e^{2x}}_{y'} + 4\cdot\underbrace{Ax^2e^{2x}}_{y} = e^{2x} \quad /:e^{2x}$$

$$2A + \cancel{8Ax} + \cancel{4Ax^2} - \cancel{8Ax} - \cancel{8Ax^2} + \cancel{4Ax^2} = 1$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

RSRN$_2$: $y = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

RORN: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x + 1 + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

c) $y'' + y = xe^x + \sin x$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

RORJ: $y = e^{0\cdot x}(C_1\cos x + C_2\sin x) = C_1\cos x + C_2\sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

RN$_1$: $y'' + y = xe^x$, RN$_2$: $y'' + y = \sin x$

$$y_1 = (ax+b)e^x$$

$$y_1' = ae^x + (ax+b)\cdot e^x = (ax+a+b)e^x$$

$$y_1'' = ae^x + (ax+a+b)e^x = (ax+2a+b)e^x$$

$$(ax+2a+b)e^x + (ax+b)e^x = xe^x \quad /:e^x$$

$$ax + 2a + b + ax + b = x$$

$$2ax + 2a + 2b = x$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{RSRN}_1: y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x$$

RN_1: $y'' + y = \sin x$

Przewidywanie: $y_2 = Ax\sin x + Bx\cos x$.

(Trzeba poprawić przewidywanie $y_2 = A\sin x + B\cos x$, ponieważ jest to RORJ!)

$$y_2' = A\sin x + Ax\cos x + B\cos x + Bx(-\sin x) =$$
$$(A - Bx)\sin x + (Ax + B)\cos x$$

$$y_2'' = -B\sin x + (A - Bx)\cos x + A\cos x + (Ax + B)(-\sin x) =$$
$$(-B - Ax - B)\sin x + (A - Bx + A)\cos x =$$
$$(-2B - Ax)\sin x + (2A - Bx)\cos x$$

$$\underbrace{(-2B - Ax)\sin x + (2A - Bx)\cos x}_{y''} + \underbrace{Ax\sin x + Bx\cos x}_{y} = \sin x$$

$$-2B\sin x + 2A\cos x = \sin x$$

$$\begin{cases} -2B = 1 \\ 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = 0 \end{cases} \quad RSRN_2: y = -\frac{1}{2}x\cos x$$

RORN: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x - \frac{1}{2}x\cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

III Równania różniczkowe liniowe II rzędu o stałych współczynnikach – NIEJEDNORODNE – METODA UZMIENNIANIA STAŁYCH

Wykorzystujemy w niej RORJ. Uzmienniamy dwie stałe tam występujące:

$$y = C_1(x)p(x) + C_2(x)q(x),$$

p, q – f-cje, które przyjmują jedną z trzech postaci, w zależności od Δ.

Dalej rozwiązujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,p(x) + C_2'(x)\,q(x) = 0 \\ C_1'(x)\,p'(x) + C_2'(x)\,q'(x) = f(x), \end{cases}$$

gdzie niewiadomymi są f-cje $C_1'(x), C_2'(x)$.

<u>Zadanie 3</u> Rozwiązać następujące równanie różniczkowe

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ b) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$

Rozwiązanie:

a) RJ: $y'' - 2y' + y = 0$

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$

$r_0 = 1$

RORJ: $y = C_1 \underbrace{e^x}_{=p(x)} + C_2 \underbrace{xe^x}_{=q(x)}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Metoda wyznaczników
rozwiązywanie kwadratowych
ukł. równań liniowych

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

$W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$

$W_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = md - nb$

$W_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = an - cm$

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}$$

$y = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,xe^x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,xe^x = 0 \\ C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,[1e^x + xe^x] = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x}(1+x) - xe^{2x} = e^{2x}$

$W_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x(1+x) \end{vmatrix} = -e^{2x}$

$W_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$

$C_1'(x) = \frac{W_{C_1'}}{W} = -1 \Rightarrow C_1(x) = \int -1\,dx = -x + D$

$C_2'(x) = \frac{W_{C_2'}}{W} = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + E$

RORN:

$\Rightarrow y = (-x + D)e^x + (\ln|x| + E)\cdot xe^x$

$D, E \in \mathbb{R}$

b) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 2$

RORJ: $y = e^{0x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y = C_1(x) \cdot \sin 2x + C_2(x) \cos 2x$

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin 2x + C_2'(x) \cos 2x = 0 \\ C_1'(x) \cos 2x \cdot 2 + C_2'(x)(-\sin 2x) \cdot 2 = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$W_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -\frac{\cos 2x}{\cos 2x} = -1$$

$$W_{C_2'} = \begin{vmatrix} \sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$$

$C_1'(x) = \frac{-1}{-2} \Rightarrow C_1(x) = \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x + D, \ D \in \mathbb{R}$

$C_2'(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{-2} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -\sin 2x \cdot 2\, dx = dt \\ \sin 2x\, dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right|$

$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + E$

$y = \left(\frac{1}{2}x + D\right) \sin 2x + \left(\frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + E\right) \cos 2x =$

$D \sin 2x + E \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x,$

$D, E \in \mathbb{R}.$