CAŁKA NIEOZNACZONA

Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym przedziale I. Każdą funkcję $F(x)$ różniczkowalną w przedziale I i spełniającą w całym przedziale warunek

$$F'(x) = f(x)$$

nazywamy **FUNKCJĄ PIERWOTNĄ** f-cji $f(x)$ w przedziale I.

Funkcję pierwotną nazywamy również **CAŁKĄ NIEOZNACZONĄ** lub krótko **CAŁKĄ** danej funkcji i oznaczamy:

$$\int f(x)dx$$

Ponieważ dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$ jest $(C)' = 0$, mamy:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (\text{bo } (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)).$$

WZORY PODSTAWOWE

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int \cos x = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} = tg x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} = -ctg x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg x + C = -arcctg x + C'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$$

PONADTO:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

CAŁKOWANIE SUMY I ILOCZYNU:

Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą funkcjami całkowalnymi w przedziale I. Wówczas suma $f+g$ ma w przedziale I całkę, przy czym:

całka sumy to suma całek, tj.:

$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx$$

Podobnie, jeżeli A jest dowolną stałą, to:

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx.$$

PRZYKŁAD 1 Korzystając z podstawowych wzorów obliczyć całki:

- $\int (x^2+4x^3+1)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{rozdzielam na sumę całek}\\ \text{oraz wyciągam stałe}\end{array}\right\} = \int x^2dx + 4\int x^3 dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^4}{4} + \int x^0 dx =$
$= \frac{x^3}{3}+x^4+x+C.$

- $\int \frac{e^x+3}{6}dx = \int\left(\frac{e^x}{6}+\frac{3}{6}\right)dx = \int \frac{e^x}{6}dx + \int\frac12 dx = \frac16\int e^x dx + \frac12\int dx = \frac16 e^x + \frac12 x + C.$

- $\int (3-5x)\sqrt{x}\,dx = \int(3-5x)x^{\frac12}dx = \int(3x^{\frac12}-5x^{\frac32})dx = 3\int x^{\frac12}dx - 5\int x^{\frac32}dx = 3\cdot\frac{x^{\frac12+1}}{\frac12+1} - 5\cdot\frac{x^{\frac32+1}}{\frac32+1}+C =$
$= 3\cdot\frac23 x^{\frac32} - 5\cdot\frac25 x^{5/2}+C = 2x^{3/2}-2x^{5/2}+C.$

- $\int\left(2x-\frac{1}{x^2}+\frac{26}{x^4}\right)dx = 2\int x\, dx - \int x^{-2}dx + 26\int x^{-4}dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} + 26\,\frac{x^{-3}}{-3}+C = x^2+\frac1x-\frac{26}{3x^3}+C.$

- $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x} = \{\sin^2x+\cos^2x=1\} = \int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx = \int\frac{\sin^2 x}{\sin^2x\cos^2x}dx + \int\frac{\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx =$
$= \int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{1}{\sin^2x}dx = \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C.$

- $\int \operatorname{ctg}^2x\, dx = \left\{\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}\right\} = \int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx = \{\cos^2x = 1-\sin^2x\} = \int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx = \int\frac{1}{\sin^2x}dx - \int dx =$
$= -\operatorname{ctg}x - x + C.$

- $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx = \int\left(x^{-\frac12}-x^{-\frac34}\right)dx = \int x^{-\frac12}dx - \int x^{-\frac34}dx = \frac{x^{-\frac12+1}}{-\frac12+1} - \frac{x^{-\frac34+1}}{-\frac34+1}+C = 2x^{\frac12}-4x^{\frac14}+C.$

- $\int\frac{3-2\operatorname{ctg}^2x}{\cos^2x} = \int\frac{3-2\frac{\cos^2x}{\sin^2x}}{\cos^2x}dx = 3\int\frac{1}{\cos^2x}dx - 2\int\frac{1}{\sin^2x}dx = 3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+C.$

- $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx = \int\frac{x^4+x^2-x^2}{1+x^2}dx = \int\left(\frac{x^2(x^2+1)-x^2}{1+x^2}\right)dx = \int x^2dx - \int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3} - \int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$
$= \frac{x^3}{3}-\int dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$

- $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2x}\right)dx = \int\left(e^x+\frac{e^x\cdot e^{-x}}{\cos^2x}\right)dx = \int e^x dx + \int\frac{dx}{\cos^2x} = e^x+\operatorname{tg}x+C.$

- $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 2\int\frac{1}{1+x^2}dx - 3\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\operatorname{arctg}x - 3\arcsin x + C.$

- $\int\frac{1-\sin^3x}{\sin^2x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\sin^3x}{\sin^2x}\right)dx = \int\frac{dx}{\sin^2x} - \int\sin x\, dx = -\operatorname{ctg}x+\cos x+C.$

- $\int\frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\frac{x(x^{\frac12}-x^2\cdot x^{\frac13})}{x^{\frac13}}dx = \int\frac{x\cdot x^{\frac12}-x^3\cdot x^{\frac13}}{x^{\frac13}}dx = \int\left(\frac{x^{\frac32}-x^3\cdot x^{\frac13}}{x^{\frac13}}\right)dx =$
$= \int x^{\frac32-\frac13}dx - \int x^3dx = \int x^{\frac96-\frac26}dx - \frac{x^4}{4} = \int x^{\frac76}dx - \frac{x^4}{4} = \frac{x^{\frac76+1}}{\frac76+1}-\frac{x^4}{4}+C =$
$= \frac{7}{13}x^{\frac{13}{7}}-\frac14x^4+C.$

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Niech $u(x)$ i $v(x)$ będą funkcjami mającymi w pewnym przedziale ciągłe pochodne u' i v'. Wówczas:

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Wynika to z faktu, że:

$$(uv)' = uv' + u'v, \text{ więc:}$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Całkując obie strony i uwzględniając fakt, że $\int (uv)'dx = uv$, mamy:

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\, dx.$$

PRZYKŁAD 2. Obliczyć całki:

- $\int \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right\} = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$

- $\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

- $\int x^2 \cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos x \\ u' = 2x & v = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx =$

  $= \left\{ \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\, dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

- $\int x \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\ln x \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\overbrace{x^2 \ln x}^{\neq \ln(x^3)\ !} - \frac{1}{2}\int x\, dx =$

  $= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

- $\int e^x \sin x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = e^x \\ u' = \cos x & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos x & v' = e^x \\ u' = -\sin x & v = e^x \end{array} \right\} =$

  $= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx\right) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx.$

  Mamy, że:

  $$\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\, dx$$

  Stąd:

  $$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x),$$

  czyli:

  $$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x).$$

- $\int (\ln x)^2 dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = (\ln x)^2 & v' = 1 \\ u' = \frac{2\ln x}{x} & v = x \end{array} \right\} = x(\ln x)^2 - 2\overbrace{\int \ln x\, dx}^{\text{pierwszy przykład}} = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C =$

  $= x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) + C.$

- $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \\ u' = \frac{1}{x} & v = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$

- $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & v' = \frac{1}{\sin^2 x} \\ u' = 1 & v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right\} = -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\, dx = \left\{ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \right\} = -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$

  $= \left\{ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \right\} = -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\overbrace{\cos x}^{=(\sin x)'}}{\sin x} dx = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$

- $\int \ln(x^2+1)\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln(x^2+1) & v' = 1 \\ u' = \frac{2x}{x^2+1} & v = x \end{array} \right\} = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x\ln(x^2+1) - 2\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$

  $= x\ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1} dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C.$

- $\displaystyle\int 2x \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = 2x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = x^2 \end{array} \right\} = x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$

  $\displaystyle = x^2 \operatorname{arctg} x - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C.$

- $\displaystyle\int \cos(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & v' = 1 \\ u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right\} = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin(\ln x) & v' = 1 \\ u' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right\} =$

  $= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$

  Mamy: $\int \cos(\ln x)dx = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - \int \cos(\ln x) dx$

  $2\int \cos(\ln x) dx = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \Rightarrow \int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C.$

- $\displaystyle\int (3x+1)e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 3x+1 & v' = e^x \\ u' = 3 & v = e^x \end{array} \right\} = (3x+1)e^x - 3\int e^x dx = (3x+1)e^x - 3e^x + C = (3x-2)e^x + C.$

- $\displaystyle\int (2x+1) \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x+1 & v' = \sin x \\ u' = 2 & v = -\cos x \end{array} \right\} = -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x \, dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C.$

- $\displaystyle\int \arcsin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right\} = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C \right\} =$

  $\displaystyle = x \arcsin x - \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{\overbrace{-2x}^{=(1-x^2)'}}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left\{ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \right\} =$

  $\displaystyle = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{2x}^{=(1+x^2)'}}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$ bez $|1+x^2|$, bo $1+x^2 > 0$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Załóżmy, że funkcja $g(x)$ ma ciągłą pochodną dla $a \le x \le b$.
Niech $c \le g(x) \le d$ oraz niech $f(t)$ będzie ciągła na $[c,d]$.
Wtedy:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int f(t) dt$$

PRZYKŁAD 3 Obliczyć całki:

- $\displaystyle\int (3x+7)^7 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 3x-7 \\ dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right\} = \int t^7 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{(3x+7)^8}{24} + C.$

- $\displaystyle\int (3x^2+2)e^{x^3+2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^3+2x \\ dt = (3x^2+2)dx \end{array} \right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^3+2x} + C.$

- $\displaystyle\int x e^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \Rightarrow \sin x \, dx = -dt \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$

- $\displaystyle\int \sin(2x+3) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x+3 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \sin t \, dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C.$

- $\displaystyle\int x^3 \ln(x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int t \ln t \, dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln t & v' = t \\ u' = \frac{1}{t} & v = \frac{t^2}{2} \end{array} \right\} =$

  $\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\int t dt \right) = \frac{t^2}{4}\ln t - \frac{1}{8}t^2 + C = \frac{x^4}{4}\ln x^2 - \frac{1}{8}x^4 + C$

- $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left\{ \begin{matrix} \text{korzystamy z faktu} \\ \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = -dt \end{matrix} \right\} = -\int e^t dt =$
  $= -e^t + C = -e^{-\frac{1}{x}} + C.$

- $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{matrix} \text{korzystamy z:} \\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt \end{matrix} \right\} = 2\int \cos t \, dt = 2\sin t + C =$
  $= 2\sin(\sqrt{x}) + C.$

- $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \left\{ \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$
  $= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$

- $\int x\sqrt{1+x^2} \, dx = \left\{ \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C =$
  $= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$

- $\int \frac{x}{x^2+4} dx = \left\{ \begin{matrix} t = x^2+4 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(\overset{>0}{x^2+4}) + C$

- $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \left\{ \begin{matrix} t = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t-1 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{(t-1)\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}(t - \ln|t|) + C =$
  $= \frac{1}{2}(x^2+1 - \ln(x^2+1)) + C.$

- $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \left\{ \begin{matrix} t = 1+\sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+\sin x| + C.$

- $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{9(\frac{4}{9}x^2+1)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{2}{3}x)^2+1} = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{2}{3}x \\ dt = \frac{2}{3} dx \Rightarrow dx = \frac{3}{2} dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$
  $= \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}x\right) + C.$

- $\int \ln(2x-4) dx = \left\{ \begin{matrix} t = 2x-4 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int \ln t \, dt = \left\{ \begin{matrix} u = \ln t & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{t} & v = t \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\left(t\ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t \, dt\right) =$
  $= \frac{1}{2} t\ln t - \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2}(2x-4)\ln(2x-4) - \frac{1}{2}(2x-4) + C = (x-2)(\ln(2x-4) - 1) + C.$

- $\int x\sin 3x \, dx = \left\{ \begin{matrix} t = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}t \\ dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{1}{3} t \sin t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9}\int t\sin t \, dt = \left\{ \begin{matrix} u = t & v' = \sin t \\ u' = 1 & v = -\cos t \end{matrix} \right\} =$
  $= \frac{1}{9}\left(-t\cos t + \int \cos t \, dt\right) = \frac{1}{9}(-t\cos t + \sin t) + C = \frac{1}{9}(-3x\cos 3x + \sin 3x) + C.$

- $\int \frac{2e^{3x}}{2+5e^{3x}} dx = \left\{ \begin{matrix} t = 5e^{3x}+2 \\ dt = 15e^{3x} dx \Rightarrow e^{3x} dx = \frac{1}{15} dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{2 \cdot \frac{1}{15} dt}{t} = \frac{2}{15}\int \frac{dt}{t} = \frac{2}{15}\ln|t| + C =$
  $= \frac{2}{15}\ln|5e^{3x}+2| + C = \frac{2}{15}\ln(5e^{3x}+2) + C.$

- $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left\{ \begin{matrix} t = 1+\ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+\ln x| + C.$

- $\int \frac{2\cos x \, dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \left\{ \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin(\sin x) + C.$

- $\int \frac{x^3}{(x+1)^{10}} dx = \left\{ \begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix}, \; x = t-1 \right\} = \int \frac{(t-1)^3}{t^{10}} dt = \int \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^{10}} dt = \int (t^{-7} - 3t^{-8} + 3t^{-9} - t^{-10}) dt =$

  $= \frac{t^{-6}}{-6} - 3\frac{t^{-7}}{-7} + 3\frac{t^{-8}}{-8} - \frac{t^{-9}}{-9} + C = -\frac{1}{6(x+1)^6} + \frac{3}{7(x+1)^7} - \frac{3}{8(x+1)^8} + \frac{1}{9(x+1)^9} + C.$

- $\int \sin^2\frac{x}{3} dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{x}{3} \\ dt = \frac{1}{3} dx \Rightarrow dx = 3dt \end{matrix} \right\} = 3\int \sin^2 t \, dt = \left\{ \begin{matrix} \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t \\ \text{stąd: } \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \end{matrix} \right\} =$

  $= 3\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{3}{2}\int (1-\cos 2t) dt = \frac{3}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \cos 2t \, dt = \left\{ \begin{matrix} 2t = u \\ 2dt = du \Rightarrow dt = \frac{1}{2} du \end{matrix} \right\} =$

  $= \frac{3}{2}\int \frac{1}{2} du - \frac{3}{2}\int \frac{1}{2}\cos u \, du = \frac{3}{4}u - \frac{3}{4}\sin u + C = \frac{3}{4} \cdot 2t - \frac{3}{4}\sin 2t + C =$

  $= \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{3} - \frac{3}{4} \cdot \sin\frac{2x}{3} + C = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3} + C.$

CAŁKI FUNKCJI WYMIERNYCH

Jeżeli wyrażenie podcałkowe ma postać f-cji wymiernej, to w zależności od postaci tej funkcji możemy stosować następujące metody całkowania:

A)

Ułamek podcałkowy jest **WŁAŚCIWY** (tzn. wielomian w mianowniku ma wyższy stopień niż licznik), wówczas rozkładamy mianownik na czynniki, a cały ułamek na sumę ułamków prostych I lub II rodzaju – **METODA WSPÓŁCZYNNIKÓW NIEOZNACZONYCH**, tzn.:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^m \cdot \ldots} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m},$$

gdzie wyróżnik trójmianu x^2+px+q $\Delta < 0$.

B)

Ułamek podcałkowy jest **NIEWŁAŚCIWY**, wówczas należy wykonać dzielenie wielomianów i z resztą dzielenia postąpić jak w A).

C)

Licznik ułamka podcałkowego jest pochodną mianownika tego ułamka. Wtedy stosujemy wzór (lub odpowiednie podstawienie):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

D)

Licznik ułamka podcałkowego można rozłożyć na składniki, z których jeden jest pochodną mianownika, a drugi stanowi nowy przypadek.

E)

Funkcję wymierną przez odpowiednie podstawienie da się sprowadzić do całki postaci:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

Postępujemy tak zazwyczaj w ułamkach postaci $\frac{D}{Ax^2+Bx+C}$, gdzie $\Delta < 0$.
Mianownik sprowadzamy do postaci kanonicznej, tj.:

$$Ax^2+Bx+C = A(x-p)^2+q, \text{ gdzie}$$
$$p = -\frac{B}{2A}, \quad q = -\frac{\Delta}{4A}.$$

PRZYKŁAD Obliczyć całki:

- $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+10}\,dx$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest ułamkiem właściwym badamy, czy możemy rozłożyć mianownik na czynniki, tj. badamy wyróżnik Δ trójmianu $x^2+2x+10$:

$\Delta = 4-40 = -36 < 0.$

Nie możemy zatem rozłożyć go na czynniki.

Widzimy ponadto, że w liczniku możemy „wyodrębnić” pochodną mianownika, tj.:

$$\frac{x+2}{x^2+2x+10} = \frac{\frac{1}{2}\overbrace{(2x+2)}^{\text{pochodna mianownika}}+1}{x^2+2x+10}, \text{ stąd:}$$

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int\frac{1}{x^2+2x+10}\,dx}_{I_2}$$

Ze wzoru $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$ mamy:

$$I_1 = \int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \ln|\overbrace{x^2+2x+10}^{>0 \text{ bo } \Delta<0 \text{ i } a>0}|+C = \ln(x^2+2x+10)+C.$$

$$I_2 = \int\frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \left\{\text{przypadek E)}\right\} = \int\frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \int\frac{dx}{(x+1)^2+3^2} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array}\right\} = \int\frac{dt}{t^2+3^2} = \left\{\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\right\} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Stąd:

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

- $\displaystyle\int\frac{3x-7}{2x^2-3x+5}\,dx$

Badamy mianownik:

$\Delta = 9-8\cdot 5 = -31<0$

Postępujemy tak jak w poprzednim przykładzie:

$$\frac{3x-7}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4x-3}{2x^2-3x+5} + \frac{\frac{9}{4}-7}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4x-3}{2x^2-3x+5} - \frac{19}{4}\cdot\frac{1}{2x^2-3x+5}$$

Zatem:

$$\int\frac{3x-7}{2x^2-3x+5}\,dx = \frac{3}{4}\underbrace{\int\frac{4x-3}{2x^2-3x+5}\,dx}_{I_1} - \frac{19}{4}\underbrace{\int\frac{dx}{2x^2-3x+5}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int\frac{\overbrace{4x-3}^{\text{pochodna mianownika}}}{2x^2-3x+5}\,dx = \ln(2x^2-3x+5)+C$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{2x^2-3x+5} = \int\frac{dx}{2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{8}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} = \left\{\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} \\ q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{31}{8} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} = \left\{\begin{array}{l} t = x-\frac{3}{4} \\ dt = dx \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C =$$

$$= \frac{2\sqrt{31}}{31}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{31}\,t}{31}+C = \frac{2\sqrt{31}}{31}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{31}\,x-3\sqrt{31}}{31}+C$$

Ostatecznie:

$$\int\frac{3x-7}{2x^2-3x+5}\,dx = \frac{3}{4}\ln(2x^2-3x+5) - \frac{19}{4}\cdot\frac{2\sqrt{31}}{31}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{31}\,x-3\sqrt{31}}{31}+C =$$

$$= \frac{3}{4}\ln(2x^2-3x+5) - \frac{19\sqrt{31}}{62}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{31}\,x-3\sqrt{31}}{31}+C.$$

- $\int \frac{2x^2+x-4}{x^3-x^2-2x}dx$

Stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy niż wielomianu w mianowniku, więc rozkładamy mianownik na czynniki:

$$x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x+1)(x-2)$$

Funkcję podcałkową możemy zatem rozłożyć na sumę ułamków prostych postaci:

$$\frac{2x^2+x-4}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} \quad / \cdot x(x+1)(x-2)$$

$$2x^2+x-4 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

stałe A, B, C możemy wyznaczyć na dwa sposoby:

Rozwiązując odpowiedni układ równań:

$$2x^2+x-4 = Ax^2-Ax-2A+Bx^2-2Bx+Cx^2+Cx$$

$$2x^2+x-4 = (A+B+C)x^2+(-A-2B+C)x-2A$$

Równość wielomianów jest równoważna równości odpowiednich współczynników, tj.:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A=-4 \Rightarrow A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

Wstawiamy do otrzymanego równania wybrane wartości x:

$$2x^2+x-4 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

dla $x=-1$:

$$2-1-4 = 0+3B+0 \Rightarrow -3=3B \Rightarrow B=-1$$

dla $x=2$:

$$8+2-4 = 0+0+6C \Rightarrow 6=6C \Rightarrow C=1$$

dla $x=0$:

$$-4=-2A+0+0 \Rightarrow A=2$$

Stąd:

$$\int \frac{2x^2+x-4}{x(x+1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \int\frac{2}{x}dx - \int\frac{1}{x+1}dx + \int\frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \left\{ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C \right\} = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \ln|x-2| + C.$$

- $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

Działamy jak wyżej:

$$x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).$$

Stąd:

$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} = \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

Mamy:

$$3x^2+2x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

dla $x=0$: $-3=-A \Rightarrow A=3$

dla $x=1$: $2=2B \Rightarrow B=1$

dla $x=-1$: $-2=2C \Rightarrow C=-1$

Zatem:

$$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx = \int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = 3\int\frac{1}{x}dx + \int\frac{1}{x-1}dx - \int\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= 3\ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C.$$

- $\int \frac{4x^2-11}{x^3-x^2-8x+12}dx$

Rozkładam mianownik na czynniki:

$x=2$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-x^2-8x+12$, więc z TW. BEZOUT dzieli się przez dwumian $x-2$:

$\Delta=25,\ x_1=2,\ x_2=-3$

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0

$\Rightarrow x^3-x^2-8x+12=(x-2)(x^2+x-6)=(x-2)(x-2)(x+3)=$
$=(x-2)^2(x+3)$

Zatem: $\frac{4x^2-11}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+3}$

$$4x^2-11=A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2$$

dla $x=2$: $5=5B \Rightarrow B=1$

dla $x=-3$: $25=25C \Rightarrow C=1$

dla $x=0$: $-11=-6A+3B+4C \Rightarrow -11=-6A+3+4 \Rightarrow -18=-6A \Rightarrow A=3$.

Stąd: $\int\frac{4x^2-11}{x^3-x^2-3x+12}dx=\int\frac{3}{x-2}dx+\underbrace{\int\frac{1}{(x-2)^2}dx}_{I_1}+\int\frac{1}{x+3}dx=$

$=3\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+\ln|x+3|+C$.

$I_1=\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=\left\{\begin{matrix}t=x-2\\dt=dx\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x-2}+C$.

- $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$

Rozkładam mianownik:

$x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$ lub $\frac{Ax+B}{x^2}$

Zatem: $\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$

$$1=Ax(x-1)(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx^2(x+1)+Dx^2(x-1)$$

dla $x=0$: $1=-B \Rightarrow B=-1$

dla $x=1$: $1=2C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

dla $x=-1$: $1=-2D \Rightarrow D=-\frac{1}{2}$

dla $x=2$:
$1=6A+3B+12C+4D \Rightarrow 1=6A-3+6-2 \Rightarrow 6A=0 \Rightarrow A=0$

$\int\frac{1}{x^4-x^2}dx=\int\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=-\int\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$

$=-\int x^{-2}dx+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

- $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx$

Wielomian w liczniku ma stopień wyższy niż wielomian w mianowniku, więc dzielimy je:

$$\begin{array}{l} \quad x^2 \\ \hline x^5+2 : (x^3-1) \\ -x^5+x^2 \\ \hline \qquad x^2+2 \end{array}$$

Stąd:

$$\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx = \int \left(x^2 + \frac{x^2+2}{x^3-1}\right)dx = \int x^2\,dx + \int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \overbrace{\int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,dx}^{\mathrm{I}}$$

Całkę I liczymy podobnie jak poprzednio, czyli rozkładamy mianownik na czynniki:

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \quad \Delta < 0$$

Zatem:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x^2+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

dla $x=1$: $3 = 3A \Rightarrow A = 1$

dla $x=0$: $2 = A - C \Rightarrow 1 = -C \Rightarrow C = -1$

dla $x=-1$: $3 = A - 2(-B+C) \Rightarrow 3 = 1 - 2(B-1)$

$3 = 1 + 2B + 2 \Rightarrow B = 0$

Mamy:

$$\mathrm{I} = \int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln|x-1| - \overbrace{\int \frac{dx}{x^2+x+1}}^{\mathrm{I}_1}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} + C.$$

Ostatecznie:

$$\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} + C.$$

CAŁKI FUNKCJI NIEWYMIERNYCH

Jest wiele postaci funkcji algebraicznych z niewymiernościami. Stąd też wiele metod całkowania funkcji niewymiernych. Warto wymienić następujące:

A) Jeżeli całka ma postać $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$, gdzie $R(x,y)$ jest funkcją wymierną, to stosujemy podstawienie:

$$ax+b = t^n$$

B) Dla całki postaci $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, gdzie $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$ stosujemy odpowiednie **PODSTAWIENIE EULERA**:

PIERWSZE podstawienie Eulera:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t, \quad \text{jeżeli } a > 0,$$

przy czym wybór znaku t zależy od funkcji podcałkowej, często nie ma większego znaczenia

DRUGIE podstawienie Eulera:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}, \quad \text{jeżeli } c > 0$$

stosujemy je wtedy, gdy $c > 0$ (jeżeli $a > 0$, to zaleca się stosować pierwsze podstawienie Eulera.

TRZECIE podstawienie Eulera:

Podstawienie to można stosować wtedy, gdy $\Delta > 0$ dla trójmianu ax^2+bx+c. Wtedy ma on dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, tzn.:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Wówczas stosujemy podstawienie:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t$$

C) Przy obliczaniu całek postaci $\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ stosujemy **METODĘ WSPÓŁCZYNNIKÓW NIEOZNACZONYCH LAGRANGE'A**, wg której istnieje wielomian $A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \dots + A_1x + A_0$ i stała K, że:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Wzór ten sprowadza obliczenie całki po lewej stronie równości do obliczenia prostszej całki po stronie prawej. Stałe $A_{n-1}, \dots, A_0, K$ wyznaczamy różniczkując obie strony równania i rozwiązując odpowiedni układ równań.

D) Całki postaci:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + C, \quad k > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \in \mathbb{R}$$

PRZYKŁAD 1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

Będziemy tutaj korzystać ze wzoru: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C \quad (1)$
W tym celu sprowadzamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln|t+\sqrt{t^2+4}|+C =$$

$$= \ln|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}|+C = \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C.$$

PRZYKŁAD 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}$$

Będziemy korzystać ze wzoru: $\int \frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + C$
Sprowadzamy trójmian do postaci kanonicznej:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+12x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-9(x-\frac{2}{3})^2+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(-(x-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{9})}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{9}}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x-\frac{2}{3} \\ dt = dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+\frac{2}{9}}} = \frac{1}{3}\cdot\arcsin\frac{t}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C.$$

PRZYKŁAD 3

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

Wyodrębniamy w liczniku pochodną trójmianu kwadratowego z mianownika, aby skorzystać z wzoru:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Mamy:

$$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 2\sqrt{x^2+2x+2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{ze wzoru} \\ (1) \end{array} \right\} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C.$$

Ostatecznie:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C.$$

PRZYKŁAD 4

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

Mamy tutaj $a = 1 > 0$, więc zastosujemy pierwsze podstawienie Eulera, tzn.:

$$\sqrt{x^2+4x-4} = x - t$$

Wyznaczamy x:

$\sqrt{x^2+4x-4} = x - t \ /^2$

$\cancel{x^2} + 4x - 4 = \cancel{x^2} - 2tx + t^2$

$x(4+2t) = 4 + t^2$

$x = \frac{4+t^2}{4+2t}$

Wyznaczamy dx:

$dx = \frac{2t(4+2t) - 2(4+t^2)}{(4+2t)^2}dt = \frac{8t+4t^2-8-2t^2}{(4+2t)^2}dt = \frac{2t^2+8t-8}{4(2+t)^2}dt = \frac{t^2+4t-4}{2(2+t)^2}dt$

Wyznaczamy $\sqrt{x^2+4x-4}$:

$\sqrt{x^2+4x-4} = x - t = \frac{4+t^2}{2(2+t)} - t = \frac{4+t^2-4t-2t^2}{2(2+t)} = \frac{-t^2-4t+4}{2(2+t)}$.

Wtedy:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = \int \frac{\frac{t^2+4t-4}{2(2+t)^2}dt}{\frac{4+t^2}{2(2+t)} \cdot \frac{-(t^2+4t-4)}{2(2+t)}} = \int \frac{(t^2+4t-4)\,4\,(2+t)^2}{2(2+t)^2(4+t^2)(-(t^2+4t-4))}dt =$$

$$= -2\int \frac{dt}{4+t^2} = \left\{ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \right\} = -2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \left\{ t = x - \sqrt{x^2+4x-4} \right\} = -\operatorname{arctg}\frac{x-\sqrt{x^2+4x-4}}{2} + C.$$

PRZYKŁAD 5

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Mamy $a = 1 > 0$, więc zastosujemy pierwsze podstawienie Eulera, tzn.:

$$\sqrt{x^2-1} = x - t$$

Wyznaczamy x:

$\sqrt{x^2-1} = x - t \ /^2$

$\cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} - 2tx + t^2$

$2tx = 1 + t^2 \ / : 2t$

$x = \frac{1+t^2}{2t}$

Wyznaczamy dx

$dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(1+t^2)}{4t^2}dt = \frac{4t^2-2-2t^2}{4t^2}dt = \frac{2t^2-2}{4t^2}dt = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$

Wyznaczamy $\sqrt{x^2-1}$:

$\sqrt{x^2-1} = x - t = \frac{1+t^2}{2t} - \frac{2t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}$

Wtedy:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{1-t^2}{2t}} = \int \frac{(t^2-1)\cdot 4t^2}{2t^2(1+t^2)(1-t^2)}dt = \int \frac{-2(1-t^2)dt}{(1+t^2)(1-t^2)} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\operatorname{arctg} t + C = -2\operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

UWAGA Całkę tą możemy także wyznaczyć za pomocą trzeciego podstawienia Eulera.

PRZYKŁAD 6

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$$

Mamy $a = 1 > 0$, więc zastosujemy pierwsze podstawienie Eulera:

$$\sqrt{x^2-x+1} = x - t \quad /^2$$

$\cancel{x^2} - x + 1 = \cancel{x^2} - 2tx + t^2$

$x(2t-1) = t^2 - 1$

$x = \frac{t^2-1}{2t-1}$

$dx = \frac{2t(2t-1) - 2(t^2-1)}{(2t-1)^2}dt = \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt$

$\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-1}{2t-1} - \frac{2t^2-t}{2t-1} = \frac{-t^2+t-1}{2t-1}$

Wtedy:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt}{\frac{t^2-1}{2t-1}\cdot\frac{-t^2+t-1}{2t-1}} =$$

$$= \int \frac{-2(-t^2+t-1)(2t-1)^2 dt}{(t^2-1)(-t^2+t-1)(2t-1)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{po rozłożeniu f-cji podcałkowej} \\ \text{na sumę ułamków prostych} \end{array} \right\} =$$

$$= -2\left[\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t-1} + \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t+1} \right] = -2\cdot\frac{1}{2}\ln|t-1| + 2\cdot\frac{1}{2}\ln|t+1| + C =$$

$$= -\ln\left|x - \sqrt{x^2-x+1} - 1\right| + \ln\left|x - \sqrt{x^2-x+1} + 1\right| + C.$$

PRZYKŁAD 7

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x\sqrt{x^2-4x}}\,dx$$

Ponieważ w tym przypadku mamy $a=1>0$ możemy skorzystać z pierwszego podstawienia Eulera. Ponadto $x^2-4x = x(x-4)$, więc możemy także zastosować **TRZECIE** podstawienie Eulera. Weźmy zatem:

$$\sqrt{x^2-4x} = xt$$

Wyznaczamy x:

$$\sqrt{x^2-4x} = xt \quad /^2$$
$$x^2-4x = x^2t^2 \quad /:x,\ x\neq 0$$
$$x-4 = xt^2$$
$$x(1-t^2) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{1-t^2}$$

Wyznaczamy dx:

$$dx = \frac{-4\cdot(-2t)dt}{(1-t^2)^2} = \frac{8t}{(1-t^2)^2}dt$$

Wyznaczamy $x+\sqrt{x^2-4x}$:

$$x+\sqrt{x^2-4x} = \frac{4}{1-t^2}+\frac{4t}{1-t^2} = \frac{4(t+1)}{1-t^2} = \frac{4}{1-t}$$

Wyznaczamy $\sqrt{x^2-4x}$:

$$\sqrt{x^2-4x} = xt = \frac{4t}{1-t^2}$$

Wówczas:

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x\sqrt{x^2-4x}}dx = \int \frac{\frac{4}{1-t}}{\frac{4}{1-t^2}\cdot\frac{4t}{1-t^2}}\cdot\frac{8t}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{\overset{2}{\cancel{32t}}\,(1-\cancel{t^2})^2}{(1-t)\cdot(1-\cancel{t^2})^2\cdot\cancel{16t}}dt =$$

$$= 2\int\frac{dt}{1-t} = \left\{ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C \right\} = -2\ln|1-t|+C = \left\{ t = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x} \right\} =$$

$$= -2\ln\left|1-\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}\right|+C.$$

PRZYKŁAD 8

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$$

W tym przypadku mamy $1-x^2 = -(x-1)(x+1)$, więc zastosujemy **TRZECIE** podstawienie Eulera. Weźmy zatem:

$$\sqrt{1-x^2} = (x+1)t$$

Wyznaczamy x:

$$1-x^2 = (x+1)^2t^2 \quad /:(x+1)$$
$$1-x = (x+1)t^2$$
$$1-t^2 = x(1+t^2)$$
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Wyznaczamy dx:

$$dx = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$$

Wyznaczamy $\sqrt{1-x^2}$:

$$\sqrt{1-x^2} = (x+1)t = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1+t^2}{1+t^2}\right)\cdot t = \frac{2t}{1+t^2}$$

Wyznaczamy $x+1$:

$$x+1 = \frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

Wówczas:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = \int\frac{-4t\cdot(1+t^2)^2dt}{4t\cdot(1+t^2)^2dt} = -\int dt =$$

$$= -t+C = \left\{ t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} \right\} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}+C.$$

UWAGA

Przykład ten rozwiążemy także korzystając z **DRUGIEGO** podstawienia Eulera. Bez względu na metodę, z której korzystamy - pomimo otrzymania rozwiązań „na pierwszy rzut oka różnych" - ich zależność opisuje twierdzenie:

TW.

Dwie całki $F(x)$ i $G(x)$ tej samej funkcji $f(x)$ różnią się w całym przedziale o stałą.

Policzymy zatem całkę

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$$

za pomocą podstawienia:

$$\sqrt{1-x^2} = xt+1$$

Wyznaczamy x:

$$\cancel{1}-x^2 = x^2t^2+2tx+\cancel{1} \ /:x,\ x\neq 0$$

$$-x = xt^2+2t$$

$$-2t = x(t^2+1) \Rightarrow x = \frac{-2t}{t^2+1}$$

Wyznaczamy dx:

$$dx = \frac{-2(t^2+1)+4t^2}{(t^2+1)^2}dt = \frac{2t^2-2}{(t^2+1)^2}dt = \frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}dt$$

Wyznaczamy $\sqrt{1-x^2}$:

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{-2t^2}{t^2+1} + \frac{t^2+1}{t^2+1} = \frac{-t^2+1}{t^2+1} = \frac{(1-t)(1+t)}{t^2+1}$$

Ponadto:

$$x+1 = \frac{-2t}{t^2+1}+\frac{t^2+1}{t^2+1} = \frac{(t-1)^2}{(t^2+1)}$$

Wówczas:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\frac{(t-1)^2}{t^2+1}\cdot\frac{(1-t)(1+t)}{t^2+1}}\cdot\frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{-2\cancel{(1-t^2)}\cdot\cancel{(t^2+1)^2}dt}{(t-1)^2\cancel{(1-t^2)}\cdot\cancel{(t^2+1)^2}} =$$

$$= -2\int\frac{dt}{(t-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} u=t-1 \\ du=dt \end{array}\right\} = -2\int \frac{du}{u^2} = -2\int u^{-2}du = -2\cdot\frac{-1}{u}+C = \frac{2}{t-1}+C =$$

$$= \left\{ t = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right\} = \frac{2}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}-1}+C$$

Przekształćmy powyższe rozwiązanie:

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}-1}+C = \frac{2}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1-x}{x}}+C = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}-(1+x)}+C = \frac{2x(\sqrt{1-x^2}+1+x)}{1-x^2-(1+x)^2}+C =$$

$$= \frac{2x(\sqrt{1-x^2}+1+x)}{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}-2x-x^2}+C = \frac{2x\sqrt{1-x^2}+2x(1+x)}{-2x(x+1)}+C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}\underbrace{-1+C}_{C_2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}+C_2.$$

rozwiązanie z poprzedniego przykładu

Widzimy tutaj, że pomimo początkowo „wizualnie innego" wyniku całki te różnią się o stałą.

PRZYKŁAD 9

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$$

Mamy $a<0$, $c>0$ więc zastosujemy DRUGIE podstawienie Eulera:

$$\sqrt{2+x-x^2} = xt+\sqrt{2}$$

Wyznaczamy x:

$$\cancel{2}+x-x^2 = x^2t^2+2\sqrt{2}xt+\cancel{2} \ /:x,\ x\neq 0$$

$$1-x = xt^2+2\sqrt{2}t$$

$$1-2\sqrt{2}t = x(1+t^2) \Rightarrow x = \frac{1-2\sqrt{2}t}{1+t^2}$$

Wyznaczamy dx:

$$dx = \frac{-2\sqrt{2}(1+t^2)-2t(1-2\sqrt{2}t)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{2\sqrt{2}t^2-2t-2\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}dt$$

Wyznaczamy $\sqrt{2+x-x^2}$:

$$\sqrt{2+x-x^2} = \frac{t-2\sqrt{2}t^2}{1+t^2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}t^2}{1+t^2} = \frac{-\sqrt{2}t^2+t+\sqrt{2}}{1+t^2}$$

Wtedy:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = \int \frac{1}{\frac{1-2\sqrt{2}t}{1+t^2}\cdot\frac{-\sqrt{2}t^2+t+\sqrt{2}}{1+t^2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}t^2-2t-2\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \int\frac{-2\cancel{(-\sqrt{2}t^2+t+\sqrt{2})}\cdot\cancel{(1+t^2)^2}}{(1-2\sqrt{2}t)\cancel{(-\sqrt{2}t^2+t+\sqrt{2})}\cancel{(1+t^2)^2}}dt = -2\int\frac{dt}{1-2\sqrt{2}t} = \left\{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C\right\} =$$

$$= -2\cdot\int\frac{-2\sqrt{2}\,dt}{1-2\sqrt{2}t}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln|1-2\sqrt{2}t|+C = \left\{t=\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}}{x}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|1-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}}{x}\right|+C.$$

Ponieważ $\Delta>0$, możemy także zastosować TRZECIE podstawienie Eulera.

PRZYKŁAD 10

$$\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$$

Zastosujemy metodę współczynników nieoznaczonych. Przewidujemy postać rozwiązania:

$$\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx = (ax^2+bx+c)\cdot\sqrt{x^2-4x-7} + k\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}$$

Różniczkujemy obustronnie powyższą równość (pamiętając, że pochodna całki to funkcja podcałkowa):

$$\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}} = (2ax+b)\sqrt{x^2-4x-7} + (ax^2+bx+c)\cdot\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x-7}} + k\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-7}}$$

Mnożąc obie strony równania przez $\sqrt{x^2-4x-7}$ mamy:

$$3x^3-8x+5 = (2ax+b)(x^2-4x-7) + (ax^2+bx+c)(x-2) + k$$

Grupując wyrazy otrzymujemy:

$$3x^3-8x+5 = 3ax^3 + (-10a+2b)x^2 + (-14a-6b+c)x + (-7b-2c+k)$$

Porównujemy współczynniki otrzymanych wielomianów:

$$\begin{cases} 3 = 3a \\ -8 = -14a-6b+c \\ 0 = -10a+2b \\ 5 = -7b-2c+k \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 36 \\ k = 112 \end{cases}$$

Wracamy do całki:

będziemy korzystać ze wzoru:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C.$$

$$\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx = (x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-11}} = \left\{\begin{matrix} t = x-2 \\ dt = dx\end{matrix}\right\} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-11}} = \ln|t+\sqrt{t^2-11}|+C = \ln|x-2+\sqrt{(x-2)^2-11}| + C$$

Ostatecznie:

$$\int \frac{3x^2-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx = (x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}| + C.$$

PRZYKŁAD 11

$$\int x\sqrt{-x^2+4x+2}\,dx$$

Chcąc skorzystać z metody współczynników nieoznaczonych, musimy najpierw przekształcić naszą całkę do odpowiedniej postaci

$$\int x\sqrt{-x^2+4x+2}\,dx = \int x\cdot\sqrt{-x^2+4x+2}\cdot\frac{\sqrt{-x^2+4x+2}}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx = \int\frac{-x^3+4x^2+2x}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx$$

Całkę $\int\frac{-x^3+4x^2+2x}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx$ liczymy jak w poprzednim przykładzie, tzn. przewidujemy:

$$\int\frac{-x^3+4x^2+2x}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{-x^2+4x+2} + k\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+2}}$$

Różniczkujemy:

$$\frac{-x^3+4x^2+2x}{\sqrt{-x^2+4x+2}} = (2ax+b)\sqrt{-x^2+4x+2} + (ax^2+bx+c)\cdot\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x+2}} + \frac{k}{\sqrt{-x^2+4x+2}} \quad / \cdot \sqrt{-x^2+4x+2}$$

$$-x^3+4x^2+2x = (2ax+b)(-x^2+4x+2) + (ax^2+bx+c)(-x+2) + k$$

$$-x^3+4x^2+2x = -2ax^3 + (-b+8a-b+2a)x^2 + (4a+4b+2b-c)x + 2b+2c+k$$

Stąd:

$$\begin{cases} -3a = -1 & \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ 10a - 2b = 4 & \Rightarrow -2b = \frac{2}{3} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \\ 4a + 6b - c = 2 & \Rightarrow -c = \frac{8}{3} \Rightarrow c = -\frac{8}{3} \\ 2b + 2c + k = 0 & \Rightarrow k = \frac{18}{3} = 6 \end{cases}$$

Wówczas:

korzystamy ze wzoru:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+k}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} + C$$

$$\int \frac{-x^3+4x^2+2x}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)\sqrt{-x^2+4x+2} + 6\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-2)^2+6}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+6}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C.$$

Ostatecznie:

$$\int x\sqrt{-x^2+4x+2}\,dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)\sqrt{-x^2+4x+2} + 6\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C.$$

PRZYKŁAD 12

$$\int \frac{x+\sqrt{2x-3}}{x-1}dx$$

Oznaczmy $t=\sqrt{2x-3}$. Stąd:

$$t^2=2x-3$$
$$t^2+3=2x$$
$$x=\frac{1}{2}(t^2+3)$$

zatem:

$$dx=\frac{1}{2}\cdot 2t\,dt=t\,dt$$

Wstawiamy do całki i otrzymujemy:

$$\int \frac{x+\sqrt{2x-3}}{x-1}dx=\int \frac{\frac{1}{2}(t^2+3)+t}{\frac{1}{2}(t^2+3)-1}t\,dt=\int \frac{\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}+t}{\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}-1}t\,dt=$$

$$=\int \frac{\frac{1}{2}(t^2+3+2t)}{\frac{1}{2}(t^2+1)}t\,dt=\int \frac{t^3+2t^2+3t}{t^2+1}dt=\left\{\begin{matrix}\text{dzielimy licznik}\\ \text{przez mianownik}\end{matrix}\right\}=\int\left(t+2+\frac{2t-2}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=\int t\,dt+2\int dt+\int\frac{2t-2}{t^2+1}dt=\frac{t^2}{2}+2t+\int\frac{2t}{t^2+1}dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t^2}{2}+2t+\ln(t^2+1)-2\operatorname{arctg}t+C=\frac{2x-3}{2}+2\sqrt{2x-3}+\ln|2x-2|-2\operatorname{arctg}\sqrt{2x-3}+C.$$

PRZYKŁAD 13

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

Podstawiamy $t=\sqrt[6]{x}$ (bo NWW$(2,3)=6$). Stąd: $t^6=x$, czyli $6t^5\,dt=dx$ oraz $\sqrt{x}=t^3$ i $\sqrt[3]{x}=t^2$. Wówczas:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3-t^2}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^2(t-1)}=\int\frac{6t^3}{t-1}dt=\left\{\begin{matrix}\text{po podzieleniu}\\ \text{licznika przez mianownik}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\left(6t^2+6t+6+\frac{6}{t-1}\right)dt=\frac{6}{3}t^3+\frac{6}{2}t^2+6t+6\ln|t-1|+C=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C.$$

PRZYKŁAD 14

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

Podstawiamy:

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Rightarrow t^2=\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow t^2(1-x)=1+x\Rightarrow t^2-1=x+xt^2\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

Stąd:

$$dx=\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}dt=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt.$$ Mamy zatem:

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{4t^2\,\cancel{(t^2+1)}}{(t-1)(t+1)\cancel{(t^2+1)}(t^2+1)}dt=\left\{\begin{matrix}\text{po przekształceniu f-cji}\\ \text{na sumę ułamków prostych}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\left(\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\int\frac{-1}{t+1}dt+\int\frac{1}{t-1}dt+2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\ln|t+1|+\ln|t-1|+2\operatorname{arctg}t+C=-\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1\right|+\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$