WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE W CAŁCE PODWÓJNEJ

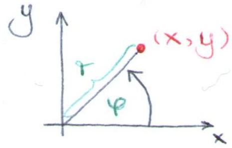
W przypadku, gdy obszar całkowania jest ograniczony łukami okręgów o środku w początku układu współrzędnych oraz odcinkami prostych przechodzących przez (0,0) wygodnie jest wprowadzić współrzędne biegunowe. Można ich używać także przy innych obszarach, ale te pojawiają się najczęściej.

Całka podwójna we współrzędnych biegunowych wyraża się wzorem:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,d\varphi\,dr$$

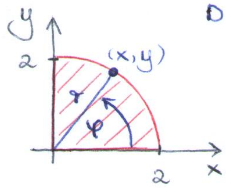
Łatwo zauważyć, że przeszliśmy ze współrzędnych x, y do współrzędnych biegunowych r, φ za pomocą podstawienia:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



oraz funkcję podcałkową domnożyliśmy przez jakobian r.
Ω jest zbiorem wartości (r, φ) przyporządkowanym punktom (x, y) obszaru D.

PRZYKŁAD Obszar D zaznaczony na rysunku opiszemy we współrzędnych biegunowych.



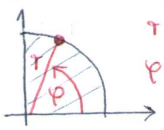
D to ćwiartka koła o promieniu 2 i środku w p. (0,0).
Zaznaczamy dowolny punkt $(x,y) \in D$.
Jako r oznaczamy promień wodzący łączący wybrany punkt z (0,0). φ to natomiast kąt między dodatnią częścią osi Ox a promieniem r.

Wówczas dowolny punkt (x, y) możemy zapisać jako:

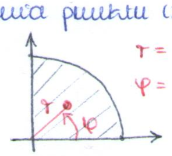
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Pozostało nam jeszcze określić jakie wartości mogą przyjmować r, φ (dla dowolnego punktu z obszaru D) tzn. określić obszar Ω, po którym będziemy całkować.

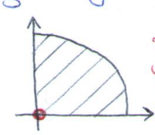
W zależności od położenia punktu (x,y) mogą to być wartości:



$r = 2$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$



$r = 1$
$\varphi = \frac{\pi}{4}$



$r = 0$
$\varphi = 0$

Naszym zadaniem jest określenie wszystkich możliwych wartości r i φ (tak jak byśmy przesuwali wybrany punkt w dowolne miejsce obszaru D).

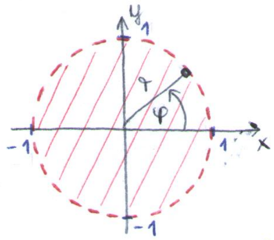
Stąd:

$$\Omega: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie D to wnętrze okręgu okręgiem $x^2+y^2=1$

↑ równanie okręgu o środku w punkcie $S=(0,0)$ i promieniu 1

Narysujmy obszar D:



wprowadzamy współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

zatem szukana całka ma postać:

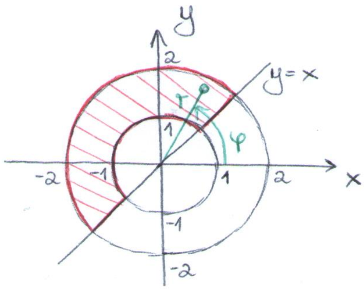
całka po prostokącie

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_\Omega \frac{drd\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}\cdot r \overset{(*)}{=} \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\cdot r\, d\varphi\right)dr =$$

$(*)$ $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}) = r^2$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)dr = \int_0^1 \varphi\Big|_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi\, dr = 2\pi r\Big|_0^1 = 2\pi r$$

PRZYKŁAD. Obliczyć całkę $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$ gdzie D jest ograniczony warunkami: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$, $y \ge x$



współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Omega: \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Stąd:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} = \iint\limits_\Omega \frac{drd\varphi}{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2}\cdot r = \int_1^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{d\varphi}{r^4}\cdot r\right)dr =$$

$$= \int_1^2\left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^{-3}d\varphi\right)dr = \int_1^2 r^{-3}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dr = \int_1^2 r^{-3}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)dr = \int_1^2 r^{-3}\pi\, dr =$$

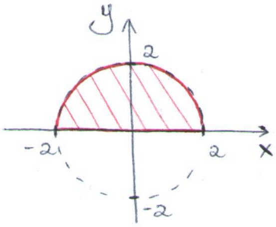
$$= -\frac{1}{2}r^{-2}\Big|_1^2\pi = -\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{1}{2}\pi\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}\pi.$$

PRZYKŁAD Obliczyć całkę $\iint\limits_D dxdy$, gdzie:

A) D jest ograniczony warunkami: $x^2+y^2=4$, $y \ge 0$

B) D to koło: $(x-1)^2+y^2 \le 1$

A)



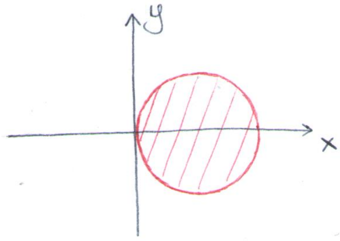
wprowadzamy współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{matrix}$$

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_\Omega r\,d\varphi dr = \int_0^2\left(\int_0^\pi r\,d\varphi\right)dr = \int_0^2 r\varphi\Big|_0^\pi dr = \int_0^2 \pi r\, dr =$$

$$= \pi\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^2 = 2\pi.$$

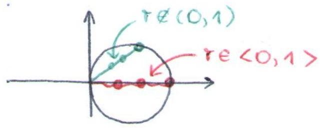
B) $D: (x-1)^2+y^2 \le 1$ ← jest to koło o promieniu 1 i środku (1,0).



wprowadzamy współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (*)$$

zauważmy, że w tym przypadku promień wodzący r nie zawsze należy do takiego samego przedziału liczbowego:



Zatem wartość r zmienia się w zależności od kąta φ. Wyznaczymy wartość r korzystając z (*) i równania okręgu $(x-1)^2+y^2=1$.

$$(r\cos\varphi-1)^2+r^2\sin^2\varphi = 1 \iff r^2\cos^2\varphi - 2r\cos\varphi + \cancel{1} + r^2\sin^2\varphi = \cancel{1} \iff$$

$$\iff r^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) - 2r\cos\varphi = 0 \iff r(r-2\cos\varphi) = 0 \iff r=0 \ \vee \ r = 2\cos\varphi$$

Stąd:

$$\Omega: \begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Otrzymany obszar Ω nie jest już prostokątem, ale tym razem otrzymaliśmy obszar normalny. Wówczas:

$$\iint_D dxdy = \iint_\Omega r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\varphi} r\,dr\right)d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\varphi\,d\varphi = \left\{ \cos^2\varphi = \frac{1+\cos2\varphi}{2} \right\} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\underbrace{\cos2\varphi}_{(**)})\,d\varphi = \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right) = \frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{2}-0 = \pi$$

$$(**) \quad \int \cos2\varphi\,d\varphi = \left\{ \begin{aligned} t &= 2\varphi \\ dt &= 2d\varphi \\ d\varphi &= \tfrac{1}{2}dt \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin2\varphi + C$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

- $\iint_D xy\,dxdy, \quad D: \ x \ge 0, \ x^2+y^2=1, \ x^2+y^2=2$
- $\iint_D x\,dxdy, \quad D: \ x^2+(y-1)^2=1, \ y \le x$
- $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad D: \ x^2+(y-1)^2=1$

CAŁKI POTRÓJNE

zad. 1. Obliczyć całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

A) $\iiint\limits_P z\cdot 2^{x-y}\,dxdydz$, $\quad P=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$

B) $\iiint\limits_P (x+y+z)\,dxdydz$, $\quad P=[1,2]\times[2,3]\times[3,4]$

Całki potrójne po prostopadłościanie liczymy analogicznie jak całki podwójne po prostokącie z tą różnicą, że całkujemy trzykrotnie względem kolejnych zmiennych pozostałe dwie traktując jako stałe.

A) $\iiint\limits_P z\cdot 2^{x-y}\,dxdydz$, $\quad P=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$

zapis ten oznacza, że $x\in[0,1]$, $y\in[0,1]$ i $z\in[-1,1]$

Stąd:

$$\iiint\limits_P z2^{x-y}\,dxdydz = \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_{-1}^1 z2^{x-y}\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1 \cdot 2^{x-y}\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_{-1}^{1}dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^1 2^{x-y}\underbrace{\left(\frac12-\frac12\right)}_{0}dy\right)dx = 0$$

B) $\iiint\limits_P (x+y+z)\,dxdydz$, $\quad P=[1,2]\times[2,3]\times[3,4]$

$$\iiint\limits_P (x+y+z)\,dxdydz = \int_1^2\left(\int_2^3\left(\int_3^4 (x+y+z)\,dz\right)dy\right)dx = \int_1^2\left(\int_2^3\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_3^4 dy\right)dx =$$

$$=\int_1^2\left(\int_2^3\left(4x+4y+\frac{16}{2}-3x-3y-\frac92\right)dy\right)dx = \int_1^2\left(\int_2^3\left(x+y+\frac72\right)dy\right)dx =$$

$$=\int_1^2\left(xy+\frac{y^2}{2}+\frac72 y\right)\Big|_2^3 dx = \int_1^2\left(3x+\frac92+\frac{21}{2}-2x-\frac42-7\right)dx = \int_1^2(x+6)\,dx =$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-6x\right]_1^2 = \frac42-12-\left(\frac12-6\right) = -10-\frac12+6 = -4-\frac12 = -\frac92$$