CAŁKI PODWÓJNE

1. CAŁKA PODWÓJNA W PROSTOKĄCIE

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie domkniętym P:

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d.$$

Całkę z funkcji $f(x,y)$ po prostokącie P oznaczamy symbolem:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$$

CAŁKI ITEROWANE

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie $P = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ i niech przy każdym stałym x istnieje całka

$$\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Jest ona funkcją zmiennej x, określoną w przedziale $a \le x \le b$. Jeżeli funkcja ta jest całkowalna na $[a,b]$, to całkę:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

nazywamy całką iterowaną funkcji $f(x,y)$. Analogicznie określamy całkę iterowaną $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$.

ZMIANA CAŁKI PODWÓJNEJ NA ITEROWANĄ.

! Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w prostokącie P, to obie całki iterowane istnieją i są równe całce podwójnej:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx,$$

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

PRZYKŁAD. (3)

Obliczyć: $\iint_P (1-xy^2)\,dx\,dy$, $P = [-2,3] \times [0,1]$

$$\iint_P (1-xy^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{3}\left[\int_0^1 (1-xy^2)\,dy\right]dx = \int_{-2}^{3}\left[y - \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 dx = \int_{-2}^{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = \left[x - \frac{x^2}{6}\right]_{-2}^{3} =$$

$$= 3 - \frac{9}{6} - \left(-2 - \frac{4}{6}\right) = 5 - \frac{5}{6} = 4\frac{1}{6}$$

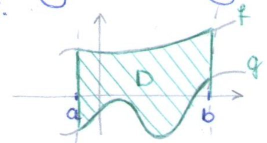
CAŁKA PODWÓJNA PO OBSZARZE NORMALNYM

Obszar NORMALNY WZGLĘDEM OSI OX:
- podzbiór D płaszczyzny ($D \subset \mathbb{R}^2$), który jest ograniczony dwoma wykresami f-cji ciągłych oraz prostymi równoległymi do osi OY.

Zbiór D jest normalny względem osi OX, jeżeli:

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$,

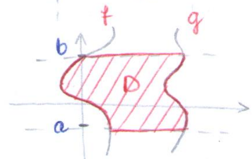
gdzie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $a < b$.



Natomiast D jest normalny względem osi OY, jeżeli:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(y) \le x \le g(y),\ a \le y \le b\}$,

gdzie $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $a < b$.



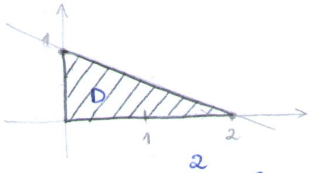
Całkę podwójną z funkcji ciągłej i ograniczonej $f(x,y)$ po obszarze normalnym (D) (1) można zamienić na całkę iterowaną wg wzoru:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

PRZYKŁAD. (3)

Obliczyć całkę po trójkącie T ograniczonym prostą $x+2y=2$ i osiami współrzędnych z funkcji $f(x,y) = 5x^2 - 2xy$.

$x + 2y = 2 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 1$



D jako normalny wzgl. OX

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$$

D jako normalny wzgl. OY:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 2 - 2y \end{cases}$$

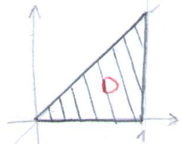
$$\iint_D (5x^2 - 2xy)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_0^{1-\frac{x}{2}} (5x^2 - 2xy)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[5x^2y - xy^2\right]_0^{1-\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(5x^2 - \frac{5}{2}x^3 - x + x^2 - \frac{x^3}{4}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(6x^2 - x - \frac{11}{4}x^3\right) dx = \left[2x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{11}{16}x^4\right]_0^2 = 16 - 2 - 11 = 3.$$

Zad. Obliczyć całki: (3)

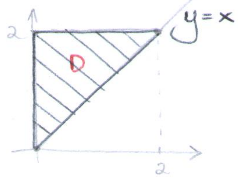
A) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2}\,dxdy$, D: $y=x$, $x=1$ i osią Ox



D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2}\,dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\right]dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

B) $\iint\limits_D (4-x-y)\,dxdy$, gdzie D: trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$

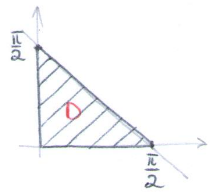


D: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2 \end{cases}$ $\qquad \iint\limits_D (4-x-y)\,dxdy = \int_0^2\left[\int_x^2 (4-x-y)\,dy\right]dx =$

$$= \int_0^2 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]\Big|_x^2 dx = \int_0^2 \left(8-2x-2-4x+x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-6x+6\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - 3x^2 + 6x\right)\Big|_0^2 = 4-12+12 = 4$$

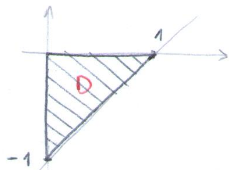
C) $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$, D to trójkąt ograniczony osiami układu i prostą $y = \frac{\pi}{2} - x$.



D: $\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x \end{cases}$ $\qquad \iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y)\,dy\right]dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\Big|_0^{\pi/2-x} dx = \int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,dx = (x+\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

D) $\iint\limits_D (10-5x-2y)\,dxdy$, D to trójkąt ograniczony osiami układu i prostą $y=x-1$.

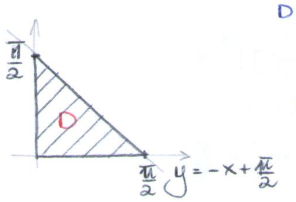


D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x-1 \le y \le 0 \end{cases}$ $\qquad \iint\limits_D (10-5x-2y)\,dxdy = \int_0^1\left[\int_{x-1}^0 (10-5x-2y)\,dy\right]dx =$

$$= \int_0^1 \left[10y - 5xy - y^2\right]_{x-1}^0 dx = \int_0^1 (-10x+10+5x^2-5x+x^2-2x+1)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (6x^2-17x+11)\,dx = \left[2x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 11x\right]_0^1 = 2 - \frac{17}{2} + 11 = 13 - \frac{17}{2} = \frac{9}{2}.$$

E) $\iint\limits_D \sin x \cos y\,dxdy$, D – trójkąt o wierzchołkach $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$, $(0,0)$



D: $\begin{cases} 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 \le y \le -x + \pi/2 \end{cases}$ $\qquad \iint\limits_D \sin x \cos y\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{-x+\pi/2} \sin x \cos y\,dy\right]dx =$

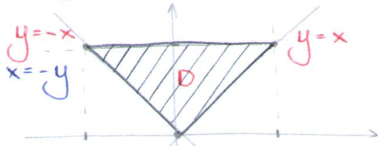
$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin x \sin y\right]_0^{-x+\pi/2} dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx = \begin{cases} t = \sin x & t=0 \text{ dla } x=0 \\ dt = \cos x\,dx & t=1 \text{ dla } x = \pi/2 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Zad. 3

Obliczyć podane całki:

A) $\iint\limits_D (2x+1)\,dx\,dy$, gdzie D to trójkąt o wierzchołkach $(-1,1)$, $(1,1)$, $(0,0)$



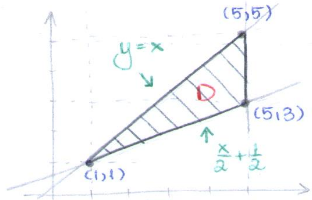
D - normalny względem osi OY.

$$D: \begin{cases} -y \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D (2x+1)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big[\int_{-y}^{y} (2x+1)\,dx\Big]dy =$$

$$= \int_0^1 [x^2+x]_{-y}^{y}\,dy = \int_0^1 (y^2+y-y^2+y)\,dy = 2\int_0^1 y\,dy = y^2\Big|_0^1 = 1.$$

B) $\iint\limits_D (2x+y-1)\,dx\,dy$, D - trójkąt o wierzchołkach $(1,1)$, $(5,3)$, $(5,5)$.



prosta przechodząca przez $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$:

$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$

$(y-1)(5-1)-(3-1)(x-1)=0$

$4y-4-2x+2=0$

$4y=2x+2$

$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

$(y-1)(5-1)-(5-1)(x-1)=0$

$4y-4-4x+4=0$

$y=x$

$$D: \begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \le y \le x \end{cases}$$

$$\iint\limits_D (2x+y-1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^5 \Big[\int_{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{x} (2x+y-1)\,dy\Big]dx = \int_1^5 \Big[2xy+\frac{y^2}{2}-y\Big]_{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{x}dx =$$

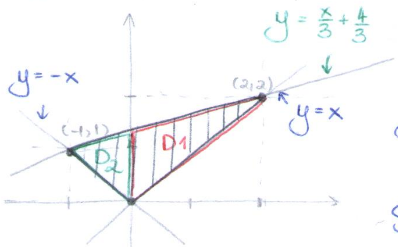
$$= \int_1^5 \Big(2x^2+\frac{x^2}{2}-x-x^2-x+\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\Big)+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)dx =$$

$$= \int_1^5 \Big(\frac{19}{8}x^2-\frac{8}{8}x^2-\frac{9}{8}x+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}x\Big)dx = \int_1^5\Big(\frac{11}{8}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{3}{8}\Big)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{11}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\Big)\Big|_1^5 = \frac{1}{8}(\ \ldots$$

$$= \frac{136}{3}$$

C) $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, D - trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$, $(-1,1)$.



$A(-1,1)$, $B(2,2)$

$(y-1)(2+1)-(2-1)(x+1)=0$

$3y-3-x-1=0$

$3y=x+4$

$y=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$

Dzielimy D na dwa obszary normalne:

$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le \frac{x}{3}+\frac{4}{3} \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -x \le y \le \frac{x}{3}+\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dx\,dy = I$$

$$\iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^2\Big[\int_x^{\frac{x}{3}+\frac{4}{3}} (x+2y)\,dy\Big]dx = \int_0^2 [xy+y^2]_x^{\frac{x}{3}+\frac{4}{3}}dx =$$

$$= \int_0^2 \Big(x\Big(\frac{x}{3}+\frac{4}{3}\Big)+\frac{x^2}{9}+\frac{8}{9}x+\frac{16}{9}-x^2-x^2\Big)dx = \int_0^2\Big(\frac{3x^2}{9}+\frac{12}{9}x-\frac{17}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{16}{9}\Big)dx =$$

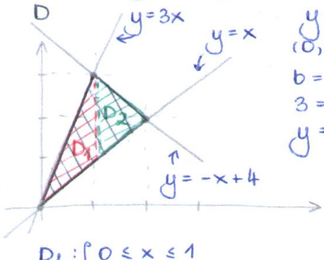
$$= \frac{1}{9}\int_0^2(-14x^2+20x+16)\,dx = \frac{1}{9}\Big[-\frac{14}{3}x^3+10x^2+16x\Big]_0^2 = \frac{1}{9}\Big(-\frac{112}{3}+40+32\Big) = \frac{1}{9}\Big(-\frac{112}{3}+\frac{216}{3}\Big) = \frac{1}{9}\cdot\frac{104}{3} = \frac{104}{27}$$

$$\iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0\Big[\int_{-x}^{x/3+4/3} (x+2y)\,dy\Big]dx = \int_{-1}^0 [xy+y^2]_{-x}^{\frac{x}{3}+\frac{4}{3}}dx = \int_{-1}^0\Big(\frac{3x^2}{9}+\frac{12}{9}x+\frac{x^2}{9}+\frac{8}{9}x+\frac{16}{9}+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}\Big)dx =$$

$$= \int_{-1}^0\Big(\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{16}{9}\Big)dx = \frac{1}{9}\Big(\frac{4}{3}x^3+10x^2+16x\Big)\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{9}\Big(-\frac{4}{3}+10-16\Big) = -\frac{1}{9}\Big(-\frac{4}{3}-\frac{18}{3}\Big) = \frac{22}{27}$$

$$I = \frac{104}{27}+\frac{22}{27} = \frac{126}{27} = \frac{14}{3}$$ OK =)

D) $\iint\limits_D (4-x-y)\,dx\,dy$, D - trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$.



$y=ax+b$

$(0,0)$; $(1,3)$

$b=0$

$3=a$

$y=3x$

$(1,3)$, $(2,2)$

$$\begin{cases} 3=a+b \\ 2=2a+b \end{cases}$$

$3-2=a-2a$

$1=-a \Rightarrow a=-1$

$b=4$

$y=-x+4$

$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 3x \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le -x+4 \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D_1} (4-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1\Big[\int_x^{3x}(4-x-y)\,dy\Big]dx =$$

$$= \int_0^1\Big(4y-xy-\frac{y^2}{2}\Big)_x^{3x}dx = \int_0^1\Big(12x-3x^2-\frac{9}{2}x^2-4x+x^2+\frac{x^2}{2}\Big)dx =$$

$$= \int_0^1(-6x^2+8x)\,dx = [-2x^3+4x^2]_0^1 = -2+4 = 2$$

$(4-x)^2 = 16-8x+x^2$

$-\frac{16-8x+x^2}{2} = -8+4x-\frac{x^2}{2}$

$$\iint\limits_{D_2} (4-x-y)\,dx\,dy = \int_1^2\Big[\int_x^{-x+4}(4-x-y)\,dy\Big]dx = \int_1^2\Big[4y-xy-\frac{y^2}{2}\Big]_x^{-x+4}dx =$$

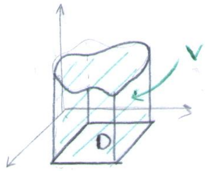
$$= \int_1^2\Big(\cancel{-4x}+16+x^2-4x-8+\cancel{4x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-4x+x^2+\cancel{\frac{x^2}{2}}\Big)dx = \int_1^2(2x^2-8x+8)\,dx = \Big(\frac{2}{3}x^3-4x^2+8x\Big)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{16}{3}-16+16-\frac{2}{3}+4-8 = -4+\frac{14}{3} = \frac{2}{3}$$

$$I = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

ZASTOSOWANIA CAŁEK PODWÓJNYCH

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją nieujemną w zbiorze D.



OBJĘTOŚĆ bryły V wyraża się wzorem:

$$|V| = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

POLE obszaru D określa całka:

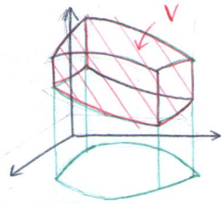
$$|D| = \iint_D dx\,dy.$$

Niech V będzie bryłą mającą kształt słupa ograniczonego z dwóch stron powierzchniami:

$$z=\varphi(x,y),\quad z=\psi(x,y),$$

gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi w pewnym obszarze regularnym D, przy czym $\varphi \geq \psi$.
Wówczas **OBJĘTOŚĆ BRYŁY V** wyraża wzór:

$$|V| = \iint_D [\varphi(x,y)-\psi(x,y)]\,dx\,dy$$

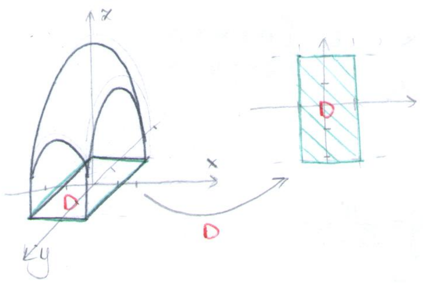


POLE PŁATA POWIERZCHNIOWEGO

Niech D będzie obszarem płaskim regularnym, ograniczonym jedną krzywą regularną zamkniętą K. Niech $f(x,y)$ będzie f-cją określoną i ciągłą w zb. $\bar{D}$, mającą w D ciągłe i ograniczone pochodne f_x i f_y.
Wówczas pole płata powierzchniowego o r. równaniu: $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ określa wzór:

$$S = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

Zad. 1
Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie Oxy i ograniczony prostymi $x=1$, $y=2$, $x=-1$, $y=-2$, został ścięty od góry powierzchnią $z=6-x^2-y^2$. Obl. objętość powstałej bryły.



$$D: \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -2\leq y\leq 2 \end{cases}$$

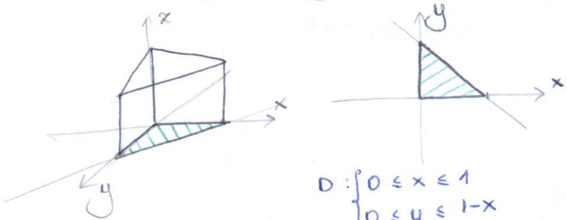
$$V = \iint_D (6-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2}(6-x^2-y^2)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[6y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2}dx = \int_{-1}^{1}\left(12-2x^2-\frac{8}{3}+12-2x^2-\frac{8}{3}\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{56}{3}-4x^2\right)dx = \left[\frac{56}{3}x-\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{56}{3}-\frac{4}{3}+\frac{56}{3}-\frac{4}{3} =$$

$$= \frac{104}{3}$$ OK =)

Zad. 2.
Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
$z=1+x+y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$



$$D: \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1-x \end{cases}$$

$$V = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1+x+y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[y+xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx =$$

$$= \int_0^1\left(1-\cancel{x}+\cancel{x}-x^2+\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{2}x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^1 =$$

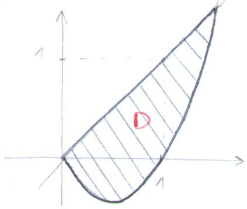
$$= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

zad. 3

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$y = x^2 - x, \quad y = x$

$y = x^2 - x = x(x-1)$



$x = x^2 - x$

$x^2 - 2x = 0$

$x = 0 \lor x = 2$

$|D| = \int_0^2 \left[\int_{x^2-x}^{x} dy\, dx\right] = \int_0^2 (x - x^2 + x)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx =$

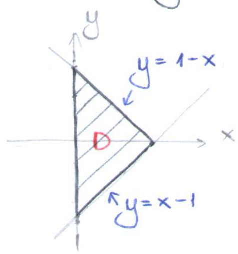
$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2 - x \le y \le x \end{cases}$

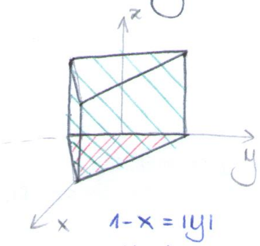
$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$ OK =)

zad. 4.

Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami:

$x = 0, \quad x = 1 - |y|, \quad z = 0, \quad z = 10 - 5x - 2y$





$1 - x = |y|$

$y = 1 - x \lor y = x - 1$

$|V| = \iint_D (10 - 5x - 2y)\, dx\, dy =$

$= \int_0^1 \left[\int_{x-1}^{1-x} (10 - 5x - 2y)\, dy\right] dx =$

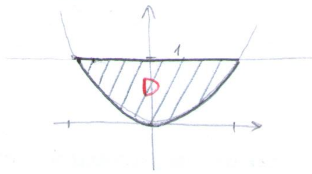
$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x - 1 \le y \le 1 - x \end{cases}$

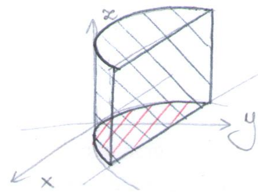
$= \frac{25}{3}$ OK =)

zad. 5.

Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami:

$y = x^2, \quad y = 1, \quad x + y + z = 4, \quad z = 0$





$D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases}$

$V = \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2}^{1} (4 - x - y)\, dy\right] dx = \frac{68}{15} > 0$ OK =)

zad. 6.

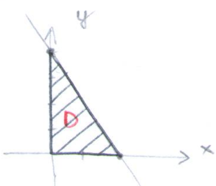
Obliczyć pole płata powierzchni określonego równaniami:

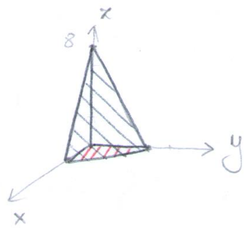
$z = 8 - 4x - 2y, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

$\Downarrow z = 0$

$0 = 8 - 4x - 2y$

$y = -2x + 4$





$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le -2x + 4 \end{cases}$

$f(x,y) = 8 - 4x - 2y$

$f_x = -4, \quad f_y = -2$

$P = \iint_D \sqrt{1 + 16 + 4}\, dx\, dy =$

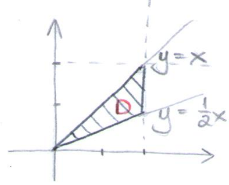
$= \sqrt{21} \iint_D dx\, dy =$ POLE D

$= \sqrt{21} \int_0^2 \left[\int_0^{-2x+4} dy\right] dx =$

$= 4\sqrt{21}$

zad. 7.

Obliczyć pole części powierzchni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest trójkąt o wierzch. $(0,0)$, $(2,2)$, $(2,1)$



$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}x \le y \le x \end{cases}$

$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$P = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy =$

$= \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{x} dy\right) dx =$

$= \sqrt{2} \int_0^2 \frac{1}{2} x\, dx = \sqrt{2} \cdot \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = \sqrt{2}$