Geometria różniczkowa

Zadania na ocenę dostateczny

zad.1a.

(a) Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej $y = \sqrt{2x^3 + x^2 + 1}$ w punkcie $M(1, 2)$.

(b) Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej $x^2y^3 - y^2 - 4 = 0$ w punkcie $M(1, 2)$.

(c) Wyznaczyć równanie stycznej do linii $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ w punkcie dla $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Wyznaczyć równanie stycznej do cisoidy $y^2(2r - x) - x^3 = 0$ w punkcie (r, r).

(e) Wyznaczyć równanie stycznej do liścia Kartezjusza $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ w punkcie $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$.

(f) Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej $y = a \ln \cos(\frac{x}{a})$ w punkcie $x = 2\pi a$.

(g) Wyznaczyć równanie stycznej do rozwijającej okręgu $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t \cos t)$ $(r > 0)$ w punkcie dla $t = \frac{\pi}{4}$.

(h) Wyznaczyć równanie stycznej do spiralnej logarytmicznej $r = e^{\varphi}$ w punkcie $\varphi = k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

zad.1b.

(a) Wyznaczyć równanie normalnej do krzywej $y = \sqrt{2x^3 + x^2 + 1}$ w punkcie $M(1, 2)$.

(b) Wyznaczyć równanie normalnej do krzywej $x^2y^3 - y^2 - 4 = 0$ w punkcie $M(1, 2)$.

(c) Wyznaczyć równanie normalnej do linii $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ w punkcie dla $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Wyznaczyć równanie normalnej do cisoidy $y^2(2r - x) - x^3 = 0$ w punkcie (r, r).

(e) Wyznaczyć równanie normalnej do liścia Kartezjusza $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ w punkcie $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$.

(f) Wyznaczyć równanie normalnej do krzywej $y = a \ln \cos(\frac{x}{a})$ w punkcie $x = 2\pi a$.

(g) Wyznaczyć równanie normalnej do rozwijającej okręgu $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t \cos t)$ $(r > 0)$ w punkcie dla $t = \frac{\pi}{4}$.

(h) Wyznaczyć równanie normalnej do spiralnej logarytmicznej $r = e^{\varphi}$ w punkcie $\varphi = k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Geometria różniczkowa

Zadania na wyższą ocenę

zad.2. (a) Obliczyć promień krzywizny krzywej $y = x^3 - 2x$ w punkcie $A(1, -1)$.

(b) Obliczyć promień krzywizny paraboli $y^2 = 4\sqrt{2}x$ w punkcie $x = \sqrt{2}$.

(c) Obliczyć krzywiznę paraboli półsześciennej $y^2 = x^3$ w punkcie $x = \frac{4}{3}$.

(d) Obliczyć promień krzywizny krzywej $y = \mathrm{tg} x$ w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$.

(e) Obliczyć promień krzywizny krzywej $x = t^2$, $y = t^3$ w punkcie dla $t = 1$.

(f) Obliczyć promień krzywizny krzywej $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ w punkcie dla $t = \frac{\pi}{3}$.

(g) Obliczyć promień krzywizny linii krzywej $r = 2a \cos \varphi$ $(a > 0)$ w punkcie $\varphi = \varphi_0$.

(h) Obliczyć promień krzywizny spiralnej Archimedesa $r = a\varphi$ $(a > 0)$ w punkcie $\varphi = \varphi_0$.

(i) Znaleźć równanie koła krzywiznowego paraboli $y^2 = 12x$ w punkcie $P(3, -6)$ tej linii.

(j) Znaleźć równania kół krzywiznowych krzywych $y = \cos x$ i $y = \dfrac{1}{\cos x}$ w punkcie $x = 0$.

(k) Znaleźć równanie koła krzywiznowego kardioidy $x = a \cos \varphi(1 + \cos \varphi)$, $y = a \sin \varphi(1 + \cos \varphi)$ $(a > 0)$ w punkcie $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(l) Znaleźć równanie ewoluty paraboli $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

(m) Znaleźć równanie ewoluty hiperboli $xy = a^2$ $(a > 0)$.

(n) Znaleźć równanie ewoluty linii $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.

(o) Znaleźć równanie ewoluty cykloidy $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ $(r > 0)$.

(p) Znaleźć równanie ewoluty hipocykloidy

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

zad.3. (a) Wyznaczyć równanie obwiedni rodziny krzywych $y = ax^2 - a^2$.

(b) Wyznaczyć równanie obwiedni rodziny krzywych $y = mx + m^2$.

(c) Wyznaczyć równanie obwiedni rodziny krzywych $x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 1$.

zad.4. (a) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} - 7$ w punkcie $A(2, 4, -3)$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $y + \ln(\frac{x}{z}) - z = 0$ w punkcie $A(1, 1, 1)$.

(c) Wykazać, że powierzchnie dane równaniami

$$x + 2y - \ln z + 4 = 0, \quad x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$

w punkcie $A(2, -3, 1)$ mają wspólną płaszczyznę styczną, tzn. że są styczne.