ASYMPTOTY

DEF. Prosta $x=x_0$ jest ASYMPTOTĄ PIONOWĄ prawostronną (lewostronną) krzywej o równaniu $y=f(x)$, jeżeli:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty \qquad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty\right)$$

Asymptoty pionowe liczymy na krańcach dziedziny, które do niej nie należą (z ciągłości funkcji)

Jeżeli prosta ta jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną to nazywamy ją OBUSTRONNĄ.

DEF. Prosta $y=ax+b$ jest ASYMPTOTĄ UKOŚNĄ w $+\infty$ (w $-\infty$) krzywej o równaniu $y=f(x)$ jeżeli:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0\right)$$

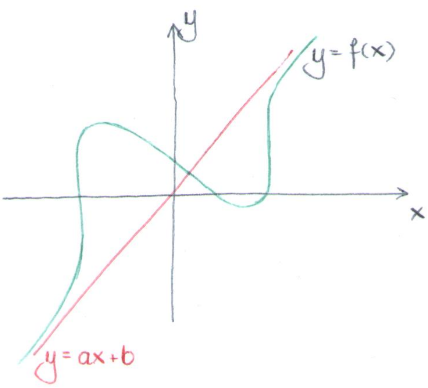
Gdy $a=0$, to prostą $y=b$ nazywamy asymptotą POZIOMĄ.

TW. Jeżeli istnieją i są właściwe granice:

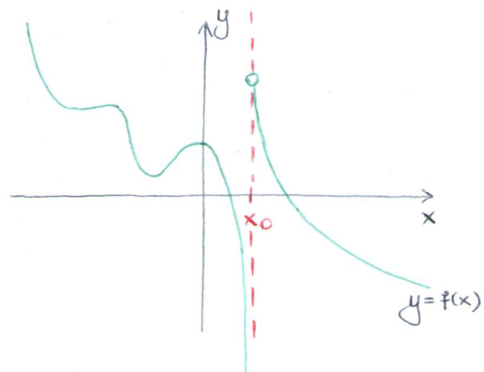
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$$

to prosta $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną f-cji $f(x)$.

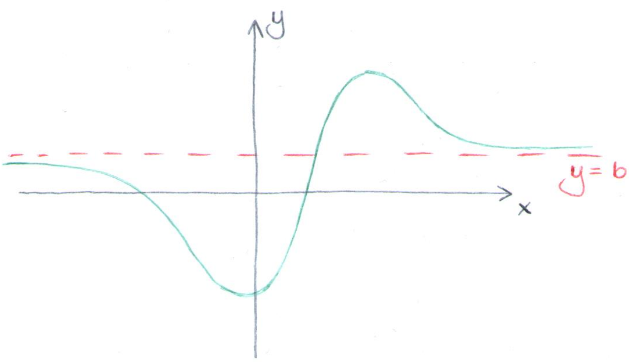
ASYMPTOTA UKOŚNA w $\pm\infty$:



ASYMPTOTA PIONOWA LEWOSTRONNA



ASYMPTOTA POZIOMA w $+\infty$ i w $-\infty$



PRZYKŁAD 1

Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2}{x^2-4}$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji:

$x^2-4 \neq 0$

$(x-2)(x+2) \neq 0$

$x \neq 2$ i $x \neq -2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

Zatem asymptot pionowych szukamy w -2 i 2, a ukośnych w $+\infty$ i w $-\infty$.

Szukamy asymptoty PIONOWEJ:

• w $x_0 = 2$

PRAWOSTRONNA

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+4x^2}{\underbrace{(x-2)}_{0^+}(x+2)} = \left[\frac{24}{4\cdot 0^+}\right] = +\infty$$

LEWOSTRONNA

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3+4x^2}{\underbrace{(x-2)}_{0^-}(x+2)} = \left[\frac{24}{4\cdot 0^-}\right] = -\infty$$

Prosta $x=2$ jest asymptotą pionową obustronną

• w $x_0 = -2$

PRAWOSTRONNA

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3+4x^2}{(x-2)\underbrace{(x+2)}_{0^+}} = \left[\frac{8}{-4\cdot 0^+}\right] = -\infty$$

LEWOSTRONNA

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3+4x^2}{(x-2)\underbrace{(x+2)}_{0^-}} = \left[\frac{8}{-4\cdot 0^-}\right] = +\infty$$

Prosta $x=-2$ jest asymptotą pionową obustronną.

Szukamy asymptoty UKOŚNEJ:

• w $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x}{x^2-4} = 1 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+4x^2}{x^2-4} - \frac{x^3-4x}{x^2-4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4x}{x^2-4} = 4 = b$$

• w $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x}{x^2-4} = 1 = a$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4x}{x^2-4} = 4 = b$$

Prosta $y=x+4$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$ i w $-\infty$.

PRZYKŁAD 2

Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$

Dziedzina funkcji: $x^3-1 \neq 0 \iff x \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

Szukamy asymptoty PIONOWEJ:

w $x_0 = 1$

PRAWOSTRONNA

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^4}{x^3-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^4}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}(x^2+x+1)} = \left[\frac{1}{0^+\cdot 3}\right] = +\infty$$

LEWOSTRONNA

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^4}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}(x^2+x+1)} = \left[\frac{1}{0^-\cdot 3}\right] = -\infty$$

Prosta $x=1$ jest asymptotą pionową obustronną.

Szukamy asymptoty UKOŚNEJ:

w $\pm\infty$:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}\,1}{\cancel{x^3}(1-\frac{1}{x^3})} = 1$$

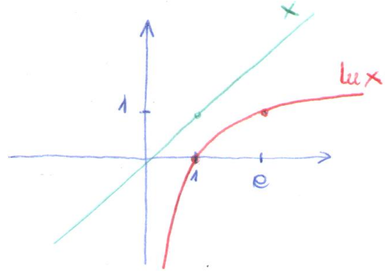
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-1} - \frac{x^4-x}{x^3-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = 0 = b$$

Prosta $y=x$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$ i w $-\infty$.

PRZYKŁAD 3

Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x)=\frac{x}{\ln x}$



Dziedzina: $\ln x \neq 0 \quad \wedge \quad x>0$

$x \neq 1$

Stąd: $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Ze względu na dziedzinę funkcja f może mieć asymptoty:

- pionową prawostronną w $x=0$
- pionową obustronną w $x=1$
- ukośną w $+\infty$

Badamy asymptotę pionową:

PRAWOSTRONNA w $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}}=0$$

brak asymptoty $(\neq\infty)$

w $x=1$

PRAWOSTRONNA

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

LEWOSTRONNA

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln x}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

prosta $x=1$ jest asymptotą pionową obustronną

Badamy asymptotę ukośną:

w $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=+\infty\notin\mathbb{R}$$

Brak asymptoty ukośnej w $+\infty$

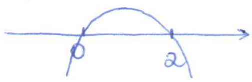
PRZYKŁAD 4

Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

Dziedzina:

$\frac{x}{2-x}\geq 0$ i $2-x\neq 0$

$x(2-x)\geq 0$ $\quad$ $x\neq 2$



$x\in\langle 0,2\rangle$

$D_f=\langle 0,2)$ $\Longrightarrow$ Funkcja f może mieć jedynie asymptotę pionową lewostronną w $x_0=2$.

Szukamy asymptoty pionowej lewostronnej

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x\sqrt{\frac{x}{2-x}}=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{x^3}{\underbrace{2-x}_{\to 0^+}}}=+\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową lewostronną w punkcie $x_0=2$.

PRZYKŁAD 5

Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Dziedzina: $x \neq 0$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Badamy asymptotę PIONOWĄ w $x_0 = 0$

PRAWOSTRONNA:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \pm\infty$$

LEWOSTRONNA:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \pm\infty$$

Brak asymptoty pionowej.

! Asymptota ukośna zredukowała się do POZIOMEJ.

BADAMY ASYMPTOTĘ UKOŚNĄ:

w $+\infty$ $(-\infty)$:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

z tw. o 3 funkcjach

$$\begin{array}{ccccc} -\frac{1}{x^2} & \leq & \frac{\sin x}{x^2} & \leq & \frac{1}{x^2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

(z tw. o 3 funkcjach)

$y = 0$ jest asymptotą poziomą w $+\infty$ i w $-\infty$.

Zad. Wyznaczyć asymptoty funkcji

A) $f(x) = \frac{3x}{x-1} + 3x$ B) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x}$ C) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$