RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

- **R.R. ZWYCZAJNE RZĘDU I-go O ZMIENNYCH ROZDZIELONYCH**

Jest to równanie postaci:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \qquad (*)$$

gdzie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są określone i ciągłe odpowiednio w przedziałach $x\in(a,b)$ oraz $y\in(c,d)$.

PRZYKŁAD: Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = 2y \qquad (**)$$

Na początku musimy rozdzielić zmienne, czyli sprowadzić nasze równanie do postaci

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Dokładniej chodzi o to, że funkcje zmiennej y i dy musimy mieć po jednej stronie równania, a funkcje zmiennej x i dy po drugiej.

Przekształcając w ten sposób nasze równanie, mamy kolejno:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \;/\cdot dx$$

$$dy = 2ydx \;/ : y, \; y\neq 0$$

Dzieląc przez y musimy założyć, że $y\neq 0$! Zatem spośród dalszych obliczeń wykluczamy przypadek, że $y=0$ jest rozwiązaniem.

„wszystko, co z y" $\rightarrow$

$$\frac{dy}{y} = 2dx$$

„wszystko, co z x"

stała (tzn. liczba 2) może być po dowolnej stronie.

Teraz całkujemy osobno każdą stronę powyższego równania według tej zmiennej, która w tej stronie występuje, tj.:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dx.$$

Po scałkowaniu:

$$\ln|y| = 2x + C, \; C\in\mathbb{R} \rightarrow$$

Stałą C wystarczy dopisać po jednej stronie, jednak TRZEBA O NIEJ PAMIĘTAĆ. Tak samo należy pamiętać o założeniu, że $C\in\mathbb{R}$.

Ponieważ szukaną funkcją jest funkcja $y=y(x)$, rozwiązując powyższe równanie WZGLĘDEM y (tzn. wyznaczamy y) otrzymamy ROZWIĄZANIE OGÓLNE RÓWNANIA O ZMIENNYCH ROZDZIELONYCH WYRAŹNEJ (jawnej, rozwikłanej).

W naszym przypadku bez problemu wyznaczymy y (otrzymaliśmy równanie logarytmiczne). Z def. logarytmu otrzymujemy:

$$|y| = e^{2x+C}$$

z własności potęgowania:

$$|y| = e^{2x}\cdot e^{C} \rightarrow$$

przy ustalonym $C\in\mathbb{R}$ e^C jest także liczbą rzeczywistą z tą różnicą, że jest dodatnia.

$$|y| = e^{2x}\cdot C_1, \; C_1>0$$

$$C_1 = e^C$$

Dla uproszczenia zapisu e^C możemy oznaczyć jako nową stałą, np. C_1, przy czym należy dodać, że $C_1>0$!

Opuszczając wartość bezwzględną, mamy:

$$y = \pm C_1 e^{2x}, \; C_1>0 \rightarrow$$

$$y = C_2 e^{2x}, \; C_2 = \pm C_1 \neq 0 \rightarrow$$

Podobnie jak poprzednio, stałą $\pm C_1$ możemy oznaczyć jako nową, np. C_2. Ponieważ $C_1>0$ mamy, że $C_2 = \pm C_1 \neq 0$.

Otrzymane rozwiązanie nie uwzględnia przypadku, gdy $y=0$ (założyliśmy, że $y\neq 0$).

Podstawiając $y=0$ do wyjściowego równania (**) mamy, że $y=0$ jest także jego rozwiązaniem.

$L = \frac{dy}{dx} = (0)' = 0, \; P = 2y = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow L=P$

Stąd, ostatecznie:

$$y = C_2 e^{2x}, \; C_2\neq 0 \text{ lub } y=0 \quad (\text{lub } y = C_3 e^{2x}, \; C_3\in\mathbb{R}, \text{ bo dla } C_3=0 \text{ mamy } y=0).$$

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$x^2\frac{dy}{dx}+y-1=0$$

Przenieśmy $y-1$ na drugą stronę (aby potem po podzieleniu przez $y-1$ otrzymać $\frac{dy}{y-1}$):

$$x^2\frac{dy}{dx} = -(y-1) \ /: y-1, \quad y\neq 1 \ !$$

$$\frac{x^2}{dx}\cdot\frac{dy}{y-1} = -1 \ /\cdot \frac{dx}{x^2}, \quad x\neq 0 \ !$$

$$\frac{dy}{y-1}=-\frac{dx}{x^2}$$

Możemy już scałkować obustronnie równanie:

$$(*)\int\frac{dy}{y-1} = -\int\frac{dx}{x^2}\ (*)$$

$$\ln|y-1| = \frac{1}{x}+C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Podobnie jak poprzednio, aby wyznaczyć y wystarczy skorzystać z def. logarytmu naturalnego ($\ln y = x \Leftrightarrow e^x = y$):

$$|y-1| = e^{\frac{1}{x}+C}$$

$$|y-1| = e^C\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$|y-1| = C_1 e^{\frac{1}{x}}, \quad C_1=e^C>0 \ !$$

$$y-1 = \pm C_1 e^{\frac{1}{x}}$$

$$y-1 = C_2 e^{\frac{1}{x}}, \quad C_2=\pm C_1,\ C_2\neq 0 \ !$$

stąd:

$$y = C_2 e^{\frac{1}{x}}+1, \quad C_2\neq 0$$

Ponieważ założyliśmy, że $y\neq 1$ sprawdzimy, czy $y=1$ jest rozwiązaniem równania:

$$x^2\frac{dy}{dx}+y-1 = x^2\cdot(1)'+1-1 = x^2\cdot 0+0=0$$

$y=1$ jest rozwiązaniem, stąd ostatecznie:

$$y = C_2 e^{\frac{1}{x}}+1,\ C_2\neq 0 \text{ lub } y=1 \quad (\text{lub } y = C_3 e^{\frac{1}{x}}+1,\ C_3\in\mathbb{R}, \text{ bo dla } C_3=0\ y=1)$$

$$(*)\int\frac{dy}{y-1} = \left\{\begin{matrix} t=y-1 \\ dt=dy\end{matrix}\right\} = \int\frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C = \ln|y-1|+C$$

lub ze wzoru: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

$$(*)\int\frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C = -x^{-1}+C = -\frac{1}{x}+C$$

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}=0$$

Na początku rozdzielamy zmienne:

$$y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1+y^2} \ /: \sqrt{1+y^2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{dx}\cdot\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = -x \ /\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

! w tym przypadku nie narzucamy założenia na y, bo $\sqrt{1+y^2}\neq 0$ dla dow. $y\in\mathbb{R}$.

Całkując obie strony, mamy:

$$(*)\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = -\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\ (*)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2}+C, \quad C\in\mathbb{R}$$

W tym przypadku doprowadzenie rozwiązania do postaci $y=y(x)$ znacznie skomplikuje zapis, stąd możemy zostawić rozwiązanie w postaci UWIKŁANEJ:

$$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Gdy chcielibyśmy wyznaczyć y, rozwiązanie miałoby postać:

$$y = \pm\sqrt{(C-\sqrt{1+x^2})^2-1}, \quad C\in\mathbb{R}$$

$$(*)\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = \left\{\begin{matrix} t=1+y^2 \\ dt=2y\,dy \Rightarrow y\,dy=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}t^{1-\frac{1}{2}}+C = t^{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{t}+C = \sqrt{1+y^2}+C$$

LUB ZE WZORU: $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+C$

$$\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = \frac{1}{2}\int\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}dy = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+y^2}+C$$

~ dla zmiennej x tak samo ~

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$x\frac{dy}{dx}+1 = x^3-\frac{dy}{dx}$$

Rozdzielając zmienne mamy kolejno:

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x^3-1 \;/\cdot \frac{dx}{\underbrace{x+1}_{\neq 0}}, \quad x\neq -1 \;!$$

$$dy = \frac{x^3-1}{x+1}dx$$

całkując, mamy:

$$\int dy = \int \frac{x^3-1}{x+1}dx$$ → całka z funkcji wymiernej:

$$y = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

dzielimy x^3-1 przez $x+1$:

	1	0	0	-1
-1	1	-1	1	-2

stąd:

$$\int \frac{x^3-1}{x+1}dx = \int \left(x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+C$$

Ponieważ nie zakładaliśmy nic o y, otrzymaliśmy ostateczne rozwiązanie. Co więcej, jest to postać jawna, więc nie musimy wyznaczać y.

$$y = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$\operatorname{tg}x\sin^2 y + \cos^2 x\operatorname{ctg}y\frac{dy}{dx} = 0$$ $\Rightarrow y\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}, \; x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (ze względu na $\operatorname{tg}x$ i $\operatorname{ctg}y$)

Rozdzielamy zmienne:

$$\cos^2 x\operatorname{ctg}y\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}x\sin^2 y \;/ : \underbrace{\cos^2 x}_{\neq 0}, \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}y\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\sin^2 y \;/ : \sin^2 y$$

$\sin^2 y \neq 0 \rightarrow y\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$!

$$\frac{\operatorname{ctg}y}{\sin^2 y}\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x} \;/\cdot dx$$

$$\frac{\operatorname{ctg}y}{\sin^2 y}dy = -\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx$$

Całkujemy obie strony równania:

$$(*)\int \frac{\operatorname{ctg}y}{\sin^2 y}dy = -\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx \;(*)$$

$$(*)\int\frac{\operatorname{ctg}y}{\sin^2 y}dy = \left\{ \begin{array}{l} t=\operatorname{ctg}y, \\ dt = -\frac{1}{\sin^2 y}dy \end{array}\right\} = -\int t\,dt = -\frac{t^2}{2}+C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 y + C$$

$$(*)\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{array}\right\} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C,\; C\in\mathbb{R} \;/\cdot 2$$

$$-\operatorname{ctg}^2 y = -\operatorname{tg}^2 x + 2C,\; C\in\mathbb{R}$$

Dla uproszczenia zapisu oznaczamy $2C$ jako nową stałą:

$$-\operatorname{ctg}^2 y = -\operatorname{tg}^2 x + C_1,\; C_1 = 2C\in\mathbb{R}$$

Stąd rozwiązanie w postaci uwikłanej ma postać:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C_1,\; C_1\in\mathbb{R}$$

W tym przypadku wyznaczenie y będzie wymagało dużo pracy, (dodatkowych założeń, aby przejść na kofunkcje), zatem zostawiamy powyższą postać rozwiązania.

Rozwiązania $y = k\pi, k\in\mathbb{Z}$ nie sprawdzamy, ponieważ w równaniu występuje $\operatorname{ctg}y$, który jest określony dla $y\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:
$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$$
przy warunku początkowym $y(0)=0$. ← WARUNEK POCZĄTKOWY

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE + WARUNEK POCZĄTKOWY = = ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE (CAUCHY'EGO).

Rozdzielając zmienne, mamy kolejno:
$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\cdot e^{y} \;/ : e^{y},\quad e^{y}>0 \text{ dla dow. } y\in\mathbb{R} \;!$$
$$\frac{dy}{e^{y}}\cdot\frac{1}{dx} = e^{2x} \;/\cdot dx$$
$$dy\, e^{-y} = e^{2x}dx$$
całkujemy obie strony:
$$(*)\int e^{-y}dy = \int e^{2x}dx \;(*)$$

$$\int e^{-y}dy = \left\{ \begin{array}{l} t=-y \\ dt=-dy \Rightarrow dy=-dt \end{array}\right\} = = -\int e^{t}dt = -e^{t}+C = -e^{-y}+C$$

LUB ZE WZORU:
$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C,\; a\neq 0$$
$(*)\int e^{2x}dx$ analogicznie

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x}+C_1 \quad C\in\mathbb{R} \;/\cdot(-1)$$
$$e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{2x}-C_1 \quad C\in\mathbb{R}$$
Niech $-C=C_1$, $C_1\in\mathbb{R}$

rozwiązanie w postaci UWIKŁANEJ → $e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{2x}+C_1,\; C_1\in\mathbb{R}$
$$-y = \ln\left(C_1-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$
$$y = -\ln\left(C_1-\frac{1}{2}e^{2x}\right),\; C_1\in\mathbb{R}$$
Rozwiązanie ogólne równania to:
$$y = -\ln\left(C_1-\frac{1}{2}e^{2x}\right),\; C_1\in\mathbb{R}$$
Naszym zadaniem jest jednak znalezienie rozwiązania zagadnienia początkowego. W tym celu w rozwiązaniu ogólnym musimy uwzględnić warunek początkowy $y(0)=0$, czyli za x wstawiamy 0 oraz za y także 0, i wyznaczamy stałą C.

Aby łatwiej wyznaczyć C skorzystamy z rozwiązania w postaci uwikłanej. Podstawiając $x=0, y=0$, mamy:
$$e^{0} = -\frac{1}{2}e^{0}+C_1$$
$$1 = -\frac{1}{2}+C_1$$
$$C_1 = \frac{3}{2}$$
Zatem ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA POCZĄTKOWEGO (rozwiązanie SZCZEGÓLNE równania) ma postać:
$$y = -\ln\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$
← wstawiamy wyliczoną stałą do rozwiązania ogólnego

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:
$$2x^2\frac{dy}{dx} = y-1 \quad /\cdot\frac{dx}{2x^2},\; x\neq 0 \;!$$
$$dy = (y-1)\frac{dx}{2x^2} \quad /:(y-1),\; y\neq 1 \;!$$
$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{2x^2}$$
$$\int\frac{dy}{y-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}$$
$$\ln|y-1| = -\frac{1}{2x}+C_1 \quad C\in\mathbb{R}$$
$$|y-1| = e^{-\frac{1}{2x}+C}$$
$$|y-1| = C_1e^{-\frac{1}{2x}},\quad C_1=e^{C}>0$$
$$y-1 = \pm C_1e^{-\frac{1}{2x}}$$
$$y-1 = C_2e^{-\frac{1}{2x}},\quad C_2=\pm C_1\neq 0$$

$$y = C_2e^{-\frac{1}{2x}}+1,\quad C_2\neq 0$$
Sprawdzamy, czy $y=1$ jest rozwiązaniem.
$L = 2\cdot x^2\cdot(1)' = 2x^2\cdot 0 = 0$; $P = 1-1 = 0 \Rightarrow L=P$
$y=1$ jest rozwiązaniem.

Stąd ostatecznie:
$$y = C_2e^{-\frac{1}{2x}}+1,\; C_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ lub } y=1$$
lub (inny, prostszy zapis):
$$y = C_3e^{-\frac{1}{2x}}+1,\; C_3\in\mathbb{R} \quad (\text{bo dla } C_3=0\; y=1).$$

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y^4(x^3-2x^2) = 2x^6y^3\frac{dy}{dx} \quad / : y^4,\ y \neq 0 \ !$$

$$x^3-2x^2 = 2x^6\frac{y^3}{y^4}\frac{dy}{dx} \quad / \cdot \frac{dx}{2x^6},\ x \neq 0 \ !$$

$$dx\cdot\frac{x^3-2x^2}{2x^6} = \frac{1}{y}dy$$

$$\left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{x^4}\right)dx = \frac{1}{y}dy$$

$$(*) \int\left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{x^4}\right)dx = \int\frac{1}{y}dy$$

$$\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}+C = \ln|y|,\ C\in\mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}+C}$$

$$|y| = C_1e^{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}},\quad C_1 = e^C > 0$$

$$y = \pm C_1e^{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}}$$

$$y = C_2e^{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}},\quad C_2 = \pm C_1 \neq 0 \quad (**)$$

$$(*) \int\left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{x^4}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^{-3}dx - \int x^{-4}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3}x^{1-3} - \frac{1}{1-4}x^{1-4}+C = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-2}-\frac{1}{3}x^{-3}+C = \frac{1}{4}x^{-2}-\frac{1}{3}x^{-3}+C = \frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}$$

Łatwo sprawdzić, że $y=0$ jest rozwiązaniem, stąd:

$$y = C_3e^{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{3x^3}},\quad C_3\in\mathbb{R}$$

dodając do C_2 stałą 0 otrzymujemy brakujące w (**) rozwiązanie $y=0$

PRZYKŁAD Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$x^2\frac{dy}{dx} = \sin\frac{1}{x} \quad / : x^2,\ x\neq 0$$

$\Rightarrow x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} \quad / \cdot dx$$

$$dy = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$$

$$\int dy = \int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx \quad (*)$$

$$(*) \int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \left\{\begin{matrix} t=\frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx\end{matrix}\right\} = -\int\sin t\,dt = \cos t + C = \cos\frac{1}{x}+C$$

$$y = \cos\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Rozwiązanie ogólne

(nie mamy założeń odnośnie y, rozwiązanie ma postać jawną, więc na tym kończymy).