

# POCHODNE CZĄSTKOWE

Obliczanie pochodnych cząstkowych odbywa się według takich samych reguł, jak w przypadku pochodnej funkcji jednej zmiennej, przy czym licząc pochodną cząstkową funkcji względem jednej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe.

ZADANIE 1 Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu dla funkcji

a)  $f(x, y, z) = 3x^3y^4z^{10}$     b)  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$     c)  $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$     d)  $f(x, y) = y^x$

Rozwiązania:

a) Pamiętajmy, że  $(af(x))' = af'(x)$ , gdzie  $a$  - stała. Dla funkcji  $f(x, y, z) = 3x^3y^4z^{10}$  mamy:

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot 3x^2 \cdot y^4 \cdot z^{10} = 9x^2y^4z^{10}.$$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot x^3 \cdot 4y^3 \cdot z^{10} = 12x^3y^3z^{10}.$$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $z$ :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot 10z^9 = 30x^3y^4z^9.$$

(Wyrażenia zapisane na czerwono traktujemy jako stałe i przepisujemy je bez zmian.)

b)  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = f(x, y, z) = x \cdot y^{-1} + y \cdot z^{-1} - z \cdot x^{-1}$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x \cdot y^{-1} + y \cdot z^{-1} - z \cdot x^{-1})'_x = 1 \cdot y^{-1} + 0 - z \cdot (-1)x^{-2}.$$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x \cdot y^{-1} + y \cdot z^{-1} - z \cdot x^{-1})'_y = x \cdot (-1)y^{-2} + 1 \cdot z^{-1} - 0.$$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $z$ :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x \cdot y^{-1} + y \cdot z^{-1} - z \cdot x^{-1})'_z = 0 + y \cdot (-1)z^{-2} - 1 \cdot x^{-1}.$$

c)  $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} = e^{y \cdot x^{-1}}$ . Pamiętajmy, że  $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ .

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^{y \cdot x^{-1}})'_x = e^{y \cdot x^{-1}} \cdot (y \cdot x^{-1})'_x = e^{y \cdot x^{-1}} \cdot (y \cdot (-1)x^{-2}).$$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (e^{y \cdot x^{-1}})'_y = e^{y \cdot x^{-1}} \cdot (y \cdot x^{-1})'_y = e^{y \cdot x^{-1}} \cdot (1 \cdot x^{-1}).$$

d)  $f(x, y) = y^x$ .

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y^x)'_x = y^x \cdot \ln y. \text{ Stosujemy tutaj wzór } (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

- pochodna cząstkowa rzędu pierwszego funkcji  $f$  względem zmiennej  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (y^x)'_y = x \cdot y^{x-1}. \text{ Stosujemy tutaj wzór } (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$