

# Funkcje wielu zmiennych

## Zadanie 1

Wyznaczyć dziedzinę funkcji

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{xy}}$
2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{2}{x^2+y^2}$
3.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$
4.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x}} \ln z$
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (x, \ln x)$
6.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (xy, \ln(1 + 2y - x^2 - y^2))$
7.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (y, \frac{z}{x}, \sqrt{y})$
8.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = (y^2 + xy, \frac{1}{y}, \ln(z - x))$
9.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x) = (x, x^2, \frac{1}{x}, 0)$
10.  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z, t) = \frac{xyz}{|t-2|-|x|}$

## Zadanie 2

Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

1.  $f(x, y) = x^2y^3 - x \cos x$
2.  $f(x, y) = x\sqrt[3]{y} - e^x \arcsin y$
3.  $f(x, y, z) = xy^4 \sin z + \operatorname{tg}(xz) - \ln(yz^3)$
4.  $f(x, y, z, t) = x^2y^3 \cos(xy \ln z - ye^{zt})$
5.  $f(x, y, z) = xy^2 \operatorname{tg} z + e^{\log(xy^2)}$
6.  $f(x, y) = 4^{y \sin x} + \ln(ye^x)$
7.  $f(x, y, z) = xyz + x^{zyz}$
8.  $f(x, y) = x^{y \ln x}$
9.  $f(x, y) = (xy)^{2y^2 - x \cos x}$
10.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2y^4 \sin z + \cos(xz) - \ln(\sqrt{xy^2z^3})}$

### Zadanie 3

Obliczyć pochodne cząstkowe do rzędu drugiego

1.  $f(x, y) = x^2 + yy^3 + xy$
2.  $f(x, y, z) = x^2 + yz^3 + xy$
3.  $f(x, y) = x^5 + yz^2 + xy \sin y$
4.  $f(x, y) = \ln(x + 3y)$
5.  $f(x, y) = \cos(x - y)$

### Zadanie 4

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

1.  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$
2.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
3.  $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
4.  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
5.  $f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3$
6.  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$
7.  $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
8.  $f(x, y) = x^2 + 8y^3 - 6xy + 1$
9.  $f(x, y) = 2xy - 4x + 2y$
10.  $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

### Zadanie 5

Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji w podanym obszarze  $D$

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y, D : y = 0, x = 0, x + y + 3 = 0$
2.  $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, D : y = 0, x = 0, x - y + 5 = 0$
3.  $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2, D : y = -1, y = 1, x = -1, x = 1$
4.  $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2, D : x^2 + y^2 \leq 4$
5.  $f(x, y) = xy, D : x^2 + y^2 \leq 2$